

Appunti di Geometria Algebrica

10 maggio 2015

Indice

Indice	1
1 Prerequisiti	3
1.1 Convergenza	3
1.2 Algebra	3
1.3 Analisi Complessa	4
1.4 Teoria delle Categorie	6
1.5 Topologia	6
2 Superfici di Riemann	8
2.1 Curve Proiettive	10
3 Mappe tra spazi di Riemann	13
3.1 Funzioni meromorfe sulla Sfera di Riemann	15
3.2 Funzioni meromorfe sulla Linea Proiettiva	15
3.3 Funzioni meromorfe sul Toro Complesso	16
3.4 Funzioni meromorfe su Curve Affini Lisce	18
3.5 Funzioni meromorfe su Curve Proiettive Lisce	19
3.6 Mappe olomorfe tra Superfici di Riemann	19
3.7 Formula di Riemann-Hurwitz	22
4 Curve Iperellittiche	23
5 Forme differenziali	24
6 Divisori	26
6.1 Immagine Inversa del Divisore	27
6.2 Equivalenza Lineare di Divisori	28
6.3 Divisori sulla Sfera di Riemann	29
6.4 Divisori sul Toro Complesso	29
6.5 Divisori su Curve Lisce Proiettive	30
6.6 Spazi $L(D)$	31
6.7 Divisori Lineari sulla Sfera di Riemann	32
6.8 Divisori Lineari sul Toro Complesso	33
6.9 Proiettivizzazione	34
7 Riemann-Roch: teorema e applicazioni	39

Prefazione

Le seguenti note fanno riferimento al corso di Algebraic Geometry I del prof. Occhetta, e si basano fondamentalmente sull'elenco di sotto, più qualche approfondimento visto a lezione, e dei prerequisiti per le parti che non sapevo.

The references are to the book of Rick Miranda, Algebraic curves and Riemann surfaces.

Riemann surfaces: basics
Chapter I

Functions and maps
Chapter II, till page 50

Hyperelliptic Riemann surfaces
Chapter III, page 60

Differential forms: basics
Chapter IV, pages 105-109 + Lemma 2.6

Divisors and meromorphic functions
Chapter V: all

Riemann-Roch Theorem and application
Chapter VII: Section 1, section 2 up to page 209, section 3 216-219 and 225-230

List of topics
For the last part of the course the main reference is the book of Griffiths and Harris, Principles of Algebraic Geometry

Sheaves and cohomology:
Pages 35-41. See also the corresponding part on Miranda's book

Divisors and line bundles:
Pages 128-137

Notes about this part are available via Esse3, by clicking on "Didattica Online" and selecting the course

Capitolo 1

Prerequisiti

1.1 Convergenza

Sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni e f funzione, tutte definite sullo stesso dominio.

Definizione 1.1. $f_n \rightarrow f$ puntualmente sse

$$\forall x \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

$f_n \rightarrow f$ uniformemente sse

$$\sup_x |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

.

Si ha che $f_n \rightarrow f$ uniformemente $\implies f_n \rightarrow f$ puntualmente, ma non il viceversa.

Esempio 1.2. Sia $f = 0$; siano

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n < x < n + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tale successioni di funzioni converge puntualmente a f , ma non uniformemente, dato che $\forall x \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Definizione 1.3. Una funzione è detta *analitica* se può esser espressa localmente come una serie di potenze convergente.

Nota bene: nel caso complesso, tutte le funzioni olomorfe sono C^∞ , quindi esprimibili con serie di Taylor, quindi analitiche.

1.2 Algebra

Lemma 1.4 (Lemma di Zorn). *Sia (X, \leq) poset non vuoto in cui ogni catena ha almeno un maggiorante. Allora X possiede elementi massimali.*

Il seguente teorema torna utile quando operiamo con i divisori. La dimostrazione è banale, ma non la ricordavo bene, quindi la riporto comunque ad onor di completezza.

Teorema 1.5 (Teorema del Rango). *Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora*

$$\dim V = \dim \text{Im } f + \dim \ker f.$$

Dimostrazione. Sia $B = \{v_1, \dots, v_r\}$ una base per $\ker f$. Quindi $\dim \ker f = r$; pongo inoltre $\dim V = n \geq r$. Allora posso usare il teorema dell'estensione della base per trovare altri vettori $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$ tali che $\text{Span}(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n) = V$. Per dimostrare il teorema è sufficiente mostrare che

$$f(v_1), \dots, f(v_r), f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)$$

formano una base di $\text{Im}(f)$. I primi r vettori sono tutti nulli perché stanno nel \ker per costruzione. Rimane mostrare che i $f(v_{r+1}), \dots$, quindi sono tutti Una combinazione lineare

$$\begin{aligned} \lambda_{r+1}f(v_{r+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) &= f(\lambda_{r+1}v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n) && \text{[per linearità di } f\text{]} \\ \implies \lambda_{r+1}v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n &\in \ker f \\ \implies \lambda_{r+1}v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_r v_r &= 0 \\ \implies \lambda_i &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

Segue che v_{r+1}, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, quindi la tesi. \square

1.3 Analisi Complessa

Definizione 1.6. Il campo dei complessi \mathbb{C} è costituito da tutte le coppie di \mathbb{R}^2 munite delle operazioni $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ ed $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Rappresenteremo talvolta la coppia $(a, b) = z = a + ib$, dove $a = \Re(z)$ e $b = \Im(z)$. Chiameremo coniugato di z la coppia $\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z)$ e modulo $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Osservazione 1.7. Valgono:

- $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$
- $\overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$
- $\overline{\bar{\alpha}} = \alpha$
- $\Re(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \quad \Im(\alpha) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2}$
- $|\alpha|^2 = \alpha \bar{\alpha}$
- $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \quad |\alpha + \beta| \geq |\alpha| + |\beta|$

Definizione 1.8. $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$.

Definizione 1.9 (Funzione Complessa). Una funzione complessa $f : V \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una coppia di funzioni $(m, n) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tali che, posto $z = x + iy$ si abbia $f(z) = m(x, y) + in(x, y)$

Analogamente al caso reale, una funzione è detta *differenziabile* se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Proposizione 1.10 (Equazioni di Cauchy-Riemann). Una funzione complessa $f(z) = u(\Re(x), \Im(y)) + iv(\Re(x), \Im(y))$ è differenziabile se e solo se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Definizione 1.11. Una funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è detta olomorfa se differenziabile in ogni punto di Ω . Indichiamo le funzioni olomorfe su Ω come $\mathcal{O}(\Omega)$.

Definizione 1.12. Un diffeomorfismo è un isomorfismo liscio, i.e. una bigezione bicontinua bi-differenziabile tra spazi topologici.

Teorema 1.13 (Teorema della Funzione Implicita). Data una curva affine X luogo degli zeri di un polinomio in $\mathbb{C}[z, \omega]$, dato un punto $p \in X$, se una delle derivate parziali è non nulla in tale punto, allora esiste una funzione olomorfa g uguale al grafico della funzione in un intorno di quel punto. Formalmente,

$$\begin{aligned} f(z, \omega) \in \mathbb{C}[z, \omega] \text{ polinomio}, \quad X = \{f = 0\} \ni p = (z_0, \omega_0), \\ \frac{\partial f}{\partial \omega}(p) \neq 0 \implies \exists g \in \mathcal{O}(\text{Int}(z_0)) \text{ s.t. } g(z) = \omega, \quad g' = -\frac{\partial f}{\partial z} / \frac{\partial f}{\partial \omega} \end{aligned}$$

Teorema 1.14 (Weierstrass M-test). Sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni tale che ogni termine n -esimo è maggiorato da M_n . Allora, se $\sum_n M_n < \infty$, $\sum_n f_n$ converge uniformemente.

Proposizione 1.15. L'inversa di una funzione olomorfa è olomorfa.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo è sostanzialmente banale, basta applicare le definizioni. Supponiamo di avere una funzione $f : X \rightarrow Y$ bigettiva, quindi $f^{-1} : Y \rightarrow X$. Abbiamo che f è olomorfa, quindi

$$(\forall x_0 \in X) \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{C}.$$

Vogliamo invece dimostrare (se f non è costante, nel cui caso sarebbe banale) che

$$(\forall y_0) \quad \exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \in \mathbb{C}.$$

Per ipotesi, $\forall y \in Y, \exists! x . y = f(x)$, quindi sostituiamo sopra:

$$\lim_{f(x) \rightarrow f(x_0)} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{f(x) \rightarrow f(x_0)} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \in \mathbb{C}$$

□

Singularità

Definizione 1.16 (Singularità). Una curva affine piana è il luogo degli zeri di un polinomio $f(z, \omega) \in \mathbb{C}[z, \omega]$. Tale curva è detta non singolare in un punto p se almeno una delle derivate parziali di f è non zero in tale punto. Una curva è detta *nonsingolare* o *liscia* se è nonsingolare in tutti i suoi punti.

Definizione 1.17 (Singularità Isolata). Una singularità isolata è un punto z_0 in cui la funzione non risulta definita, ma è differenziabile in senso complesso su qualunque punto vicino a z_0 .

$$f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

Definizione 1.18 (Singularità Eliminabile). Si ha singularità eliminabile su f in z_0 se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$.

Definizione 1.19 (Polo). Si ha un polo su z_0 se

$$\exists n > 0 \text{ s.t. } \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = L \in \mathbb{C}$$

L' n minimo che soddisfa tale equazione è detto *molteplicità* o *ordine* del polo.

Definizione 1.20 (Singularità Essenziale). Una singularità essenziale è una singularità che non rientra nei due casi precedenti.

Serie di Laurent. Una serie di Laurent è una serie del tipo

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{1.1}$$

Ogni funzione $f \in \mathcal{O}(\Omega) \supset A$ corona circolare nelle vicinanze di z_0 si può esprimere come serie di Laurent. Queste "vicinanze" possono essere di fatto a vicine o lontane da z_0 a piacere, a patto che la funzione risulti olomorfa in A .

Definizione 1.21. Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ e $\sum_n a_n (z - z_0)^n$ la serie di Laurent per f nelle vicinanze di z_0 .

Si dice che f ha uno **zero** di ordine $m > 0$ in z_0 se equivalentemente:

- $a_m \neq 0$ è il primo coefficiente non-nullo nella serie di Laurent;
- $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n)}(z_0) = 0$ e $f^{(m)} \neq 0$;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$ esiste finito non nullo.

Si dice che f ha un **polo** di ordine $m > 0$ in z_0 se equivalentemente:

- $a_{-m} \neq 0$ è il primo coefficiente non-nullo della serie di Laurent;
- $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m$ esiste finito e non nullo.

Teorema 1.22 (Principio d'Identità). Siano $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ con Ω connesso e $U \subset \Omega$ aperto con un punto di accumulazione in Ω . Allora $f|_U = g|_U \implies f = g$ su tutto Ω .

Dimostrazione. Considero $h = f - g$, abbiamo che h è identicamente nulla su U con un punto di accumulazione di U in Ω . Abbiamo detto che $h(U) = 0$, quindi h non ha uno zero isolato, allora deve essere identicamente nulla su un suo intorno (per la discretezza di zeri e poli), quindi anche sui punti di accumulazione, quindi anche sulla chiusura di U . Allora $\bar{U} = U \implies U = \Omega$. \square

Teorema 1.23 (Teorema della Mappa Aperta). $f \in \mathcal{O}(\Omega \subset \mathbb{C})$. Allora f è una mappa aperta.

Il teorema della mappa aperta non fa altro che dire: data una funzione olomorfa f definita su un aperto Ω , se prendo l'immagine di un punto $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, esiste un intorno di w_0 aperto contenuto nell'immagine della funzione.

Teorema 1.24 (Principio del Massimo Modulo). Sia f una funzione olomorfa noncostante definita su un aperto Ω . Allora f non ammette massimo.

Dimostrazione. Sia z_0 il presunto massimo della funzione, sia $w_0 = f(z_0)$ la sua immagine. Per il Teorema della Mappa Aperta esiste un intorno $\text{Int}(w_0)$ contenuto nell'immagine $f(\Omega)$, e in tale intorno vi è sicuramente un intorno più grande di w_0 . \square

È forse più comodo memorizzare la contronominale del Principio del Massimo: se la mappa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ammette massimo, allora è costante.

Teorema 1.25 (Principio dell'Argomento). Sia $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ con Ω chiuso su \mathbb{C} .

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_{\Omega} - P_{\Omega} \tag{1.2}$$

dove Z sono gli zeri e P i poli, contati con le rispettive molteplicità.

1.4 Teoria delle Categorie

Definizione 1.26. Una categoria è una quadrupla $\langle \mathcal{O}, \text{Hom}, \circ, \mathbf{1} \rangle$ dove:

- \mathcal{O} è una classe di oggetti;
- $\text{Hom}(A, B) \quad \forall A, B \in \mathcal{O}$ insieme dei morfismi;
- il morfismo $\mathbf{1} : A \rightarrow A \quad \forall A \in \mathcal{O}$ identità;
- un'operatore \circ che compone due morfismi $f \in \text{Hom}(A, B)$ e $g \in \text{Hom}(B, C)$ per qualche $A, B, C \in \mathcal{O}$, di modo che $f \circ g$ sia associativo, e l'identità si conservi nella composizione.

Definizione 1.27 (Lifting). TODO: cos'è dal punto di vista della ToC?

1.5 Topologia

Seguono un po' di cose non proprio ovvie (per me):

Proposizione 1.28. Ogni sottoinsieme discreto di un compatto è finito.

Dimostrazione. Quando si usa "discreto" qui si intende la topologia in cui ogni singolo è aperto. Quindi se abbiamo A insieme discreto sulla topologia allora $\exists U$ aperto s.t. $\text{Int}(x) \cap U = \{x\} \quad \forall x \in A$. Nei compatti abbiamo che ogni ricoprimento è finito, quindi ogni sottoinsieme discreto è necessariamente finito. \square

Proposizione 1.29. Una funzione localmente costante su un connesso è costante.

Dimostrazione. Abbiamo che $f : X \rightarrow A$ è localmente costante per un insieme W aperto, i.e. $W = f^{-1}(a)$. Per ogni altro elemento dell'immagine, notiamo che nella sua controimmagine ogni punto è interno, segue che $W^c = \bigcup_{x \neq b} f^{-1}(b)$ è aperto, quindi W è simultaneamente aperto e chiuso, quindi è tutto X . \square

Omotopie

Teorema 1.30. *In una varietà euclidea, uno spazio connesso è connesso per archi.*

Dimostrazione. In una varietà euclidea X , fisso un punto $x \in X$, e definisco $W = \{y \in X \text{ s.t. } \exists \text{ arco che connette } x \text{ a } y\}$. W è nonvuoto perché $x \in W$. Allora $\forall Y \subset X$ connesso per archi s.t. $Y \cap W \neq \emptyset \implies Y \subset W$ (se esiste un arco comune α , allora posso considerare l'arco prodotto $\alpha * \gamma_z$ per ogni $z \in Y$, e ottengo un altro arco che sta in W). Allora $\forall y \in X$ vi è una carta (U, φ) omeomorfa su \mathbb{R}^n , e:

- $y \in W \implies (U \cap W \neq \emptyset \implies U = W) \implies W$ aperto;
- $y \notin W \implies y \in W^c \implies U \not\subset W \implies U \cap W = \emptyset \implies W^c$ aperto $\implies W$ chiuso.

Perciò, $W = X$ è connesso per archi. □

Definizione 1.31 (Omotopia). Due funzioni $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ si dicono omotope se esiste un'applicazione continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che:

$$F(x, 0) = f_1(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = f_2(x).$$

Definizione 1.32 (Equivalenza Omotopica). Due spazi X, Y si dicono *omotopicamente equivalenti* se esistono due funzioni f, g continue tali che $f \circ g \sim \mathbf{1}_Y$ e $g \circ f \sim \mathbf{1}_X$.

Definizione 1.33 (Contraibilità). Uno spazio topologico si dice *contraibile* se è omotopicamente equivalente ad un punto.

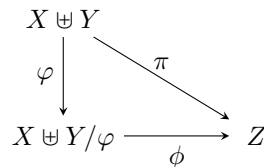
Esempio 1.34. $D^n \sim \{0\}$.

Dimostrazione. Definisco $f \in D^n \rightarrow \{0\}$ funzione costante e $g \in \{0\} \rightarrow D^n$. Dobbiamo mostrare che $f \circ g = \mathbf{1}_0$ e $g \circ f = \mathbf{1}_{D^n}$. Si nota $f \circ g = \mathbf{1}_0$ e $\mathbf{1}_{D^n} \sim \mathbf{1}_0$ giacché $F(x, y) = (1-x)t$ è un'omotopia. Abbiamo finito, perché $f \circ g \sim \mathbf{1}_0 \sim \mathbf{1}_{D^n} \sim g \circ f$. □

Incollare cose. Possiamo studiare spazi topologici anche dividendoli in più pezzi e poi incollando questi pezzi insieme. Supponiamo X, Y spazi muniti di topologia con due rispettivi aperti U, V . Se esiste un omeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, allora possiamo considerare lo spazio che contiene i punti di x , quelli di Y e le coppie $(x, \varphi(x))$ identificate con lo stesso punto, su cui ci incolliamo le topologie. Più precisamente, consideriamo dividiamo $X \uplus Y$ in tre insiemi:

- i singoletti di $X - U \{x\}$;
- i singoletti di $Y - V \{y\}$;
- e le coppie legate da $\varphi \{u, \varphi(u)\}$ dove $u \in U$.

Allora esiste uno spazio Z in cui ogni punto è identificato con una di queste classi. Esiste cioè una mappa surgettiva $\pi : X \uplus Y \rightarrow Z$ che mi lega gli spazi, e posso costruire una topologia su Z in cui un insieme W è aperto sse $\pi^{-1}(W)$ è aperto in $X \uplus Y$. Esiste inoltre un omeomorfismo ϕ tra $X \uplus Y / \varphi$ e Z .



Capitolo 2

Superfici di Riemann

Definizione 2.1 (Carta). Sia X spazio topologico. Una carta su X è un omeomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ dove U, V sono aperti di X e \mathbb{C} rispettivamente.

La definizione è consistente anche se scambiamo le carte, per via del fatto che l'inversa di una funzione olomorfa è olomorfa (Proposizione 1.15).

Definizione 2.2. Due carte sono dette *compatibili* se hanno intersezione nulla, o se la loro composizione è una funzione olomorfa, i.e.:

$$\begin{aligned} \phi : U_1 \rightarrow V_1 \text{ carta, } \psi : U_2 \rightarrow V_2 \text{ carta} \\ \phi, \psi \text{ sono compatibili} \iff U_1 \cap U_2 = \emptyset \quad \vee \quad \phi \circ \psi^{-1} \text{ è olomorfa} \end{aligned}$$

La definizione di sopra è ben posta, poiché abbiamo che $\psi(U_1 \cap U_2) \simeq U_1 \cap U_2 \simeq \phi(U_1 \cap U_2)$, quindi i due sono corrispondenti, e l'inversa di una funzione olomorfa è olomorfa per la Proposizione 1.15, quindi $\phi \circ \psi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1}$.

La composizione $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ è detta *funzione di transizione*. Essa è una bigezione, e la sua derivata non è mai nulla. Infatti, sia S la sua inversa. Allora $S \circ T = \mathbf{1} \implies$ la derivata $(S' \circ T)T' = \mathbf{1} \implies T' \neq 0$

Definizione 2.3 (Atlante). Un *atlante complesso* è una collezione di carte compatibili 2 a 2 i cui domini costituiscono un ricoprimento di X , i.e.

$$A = \{\phi_a : U_a \rightarrow V_a\}_a \quad \text{s.t.} \quad \phi_a \text{ è una carta, } X = \bigcup_a U_a$$

Definizione 2.4 (Equivalenza di Atlanti). Due atlanti sono detti *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante complesso.

Equivalentemente, possiamo dire che due atlanti sono equivalenti se le loro carte sono compatibili due a due, o se appartengono allo stesso atlante massimale (esso esiste grazie al lemma di Zorn, esso esiste sempre, e ancora di più esso induce una relazione di equivalenza sugli atlanti).

Definizione 2.5 (Struttura Complessa). Una struttura complessa su X è un atlante massimale su X .

Definizione 2.6. Una superficie di Riemann è uno spazio topologico T_2 secondo-numerabile (i.e. con una base numerabile) munito di struttura complessa.

Esempio 2.7 (Sfera di Riemann). Considero S^2 , la 2-sfera in \mathbb{R}^3

$$S^2 = \{(z, y, \omega) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \omega^2 = 1\}$$

e il piano $\{\omega = 0\}$, isomorfo a \mathbb{C} . Le mappe

$$\begin{aligned} \phi_1 : S^2 - (0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{C} : (x, y, z) \mapsto \frac{x}{1-\omega} + i \frac{y}{1-\omega} \\ \phi_2 : S^2 - \{(0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y, z) \mapsto \frac{x}{1+\omega} + i \frac{y}{1+\omega} \end{aligned}$$

di inverse

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1}(z) &= \frac{1}{|z|^2 + 1} (2\Re(z), 2\Im(z), |z|^2 - 1) \\ \phi_2^{-1}(z) &= \frac{1}{|z|^2 + 1} (2\Re(z), -2\Im(z), 1 - |z|^2) \end{aligned}$$

proiettano ogni punto della sfera (salvo i poli) sul piano, e hanno dominio comune $S^2 - \{(0,0,\pm 1)\}$ sul quale $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : z \mapsto 1/z$ è olomorfa, quindi le due carte sono compatibili. Allora S^2 con ϕ_1, ϕ_2 è una superficie di Riemann. Usualmente, questa superficie è chiamata *Sfera di Riemann*, denotata con \mathbb{C}_∞ .

Topologicamente, le superfici di Riemann conservano diverse proprietà:

- in uno spazio “simile” a \mathbb{C} , connesso \implies connesso per archi, quindi una superficie di Riemann è connessa per archi (Teorema 1.30);
- è possibile conferire un’orientamento alla superficie di Riemann partendo dallo spazio X , infatti le funzioni olomorfe preservano l’orientazione (i.e. angoli destri, angoli sinistri), che non dipende dalla scelta delle carte.
- se X è compatto, è possibile definire il *genere* come per tutte le superfici compatte, orientabile, 2-varietà, attribuendo un intero $g \geq 0$ che indicherà diffeomorfismo con il toro a g buchi.

È possibile definire una topologia su X anche solo partendo da un’atlante \mathcal{A} . Si ricorda anzitutto che dato un ricoprimento $\{U_\alpha\}_\alpha \subset 2^X$, un aperto $U \subset X$ è tale sse $U \cap U_\alpha$ è aperto $\forall \alpha$. Inoltre, le carte sono omomorfismi, quindi un aperto U è tale se e solo se $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ è aperto in $\phi(U_\alpha) \subset \mathbb{C} \quad \forall \alpha$.

Per costruire una superficie di Riemann, si parte da un insieme X , ne si trova un ricoprimento numerabile $\{U_\alpha\}$ e per ogni coppia U_α, U_β si verifica che la loro intersezione sia aperta in \mathbb{C} , i.e. $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ aperta in $V_\alpha \subset \mathbb{C}$. Infine, ci si assicura che tutte le carte siano compatibili tra loro.

Esempio 2.8 (Grafico di funzione). Il grafico $X = \{(z, g(z)) : z \in V\}$ di una funzione olomorfa $g : V \subset \mathbb{C}$ su un connesso è una superficie di Riemann. Basta infatti considerare la proiezione sulla prima componente $\pi : (z, g(z)) \mapsto z$, definita su tutto X , e omeomorfa a V . Abbiamo quindi trovato un atlante su X .

Usando il Teorema della Funzione Implicita, è possibile munire una curva piana affine $X = \{f(z, \omega) = 0\}$, *liscia*, di struttura complessa. È sufficiente considerare le proiezioni π_z, π_ω proiezioni sulle rispettive componenti. Poiché liscia, in ogni punto almeno una delle derivate parziali è non-nulla, quindi per il teorema della funzione implicita, esiste una funzione olomorfa g definita su un intorno aperto, il grafico della funzione. Tale mappa è un omeomorfismo su un aperto di \mathbb{C} . Quindi, ad ogni punto, possiamo associare una carta π_z oppure π_ω , rimane mostrare che la famiglia di tali carte è compatibile. Ma la composizione di due qualunque di queste proiezioni è l’identità, che è olomorfa, per cui le carte sono compatibili.

Abbiamo costruito un atlante su X , ma possiamo dire anche che è una superficie di Riemann rafforzando le ipotesi. $X \subset \mathbb{C}^2$ è sicuramente T_2 e secondo-numerabile per proprietà ereditate da \mathbb{C}^2 . Potrebbe esser non-connesso, se fosse il prodotto di due linee con stesso coefficiente angolare. Imponendo che f sia irriducibile, ossia che non esistano polinomi nonbanali sul campo che lo dividano, allora X è una superficie di Riemann.

Osservazione 2.9. Nessuna curva affine su $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ è compatta.

Teorema 2.10. *Se f è un polinomio nonsingolare, irriducibile, allora il suo luogo degli zeri è una superficie di Riemann.*

Toro Complesso

Siano $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente indipendenti su \mathbb{R} . Allora

$$L = \omega_1 \mathbf{Z} + \omega_2 \mathbf{Z} = \{\omega_1 a + \omega_2 b : a, b \in \mathbf{Z}\}$$

è un sottogruppo additivo di \mathbb{C} . Considero il quoziente $X = \mathbb{C}/L$ mediante la proiezione naturale $\pi : z \mapsto z + L$ su cui posso indurre la topologia tale che U è aperto in $X \iff \pi^{-1}(U)$ è aperto in \mathbb{C} .

Inoltre, π è una mappa aperta. Mostro che $\pi^{-1} \circ \pi(V)$ è aperto in \mathbb{C} ($\forall V$ aperto in \mathbb{C}):

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{v \in V} v + L = \bigcup_{\lambda \in L} \lambda + V$$

unione di traslati di un aperto, quindi aperto a sua volta. Vogliamo dare una struttura complessa a X :

Connesso $\pi : \mathbb{C}$ continua definita su un connesso $\implies X$ connesso;

Hausdorff è sufficiente considerare un $\epsilon > 0$ s.t. $2|\epsilon| < \omega \quad \forall \omega \in L$, allora per ogni coppia di punti z_0, z_1
 $D(z_0, \epsilon) \cap D(z_1, \epsilon) = \emptyset$;

Compatto* considero il parallelogramma parametrizzato in z $P_z = \{z + \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 \mid \lambda_i \in [0, 1]\}$. Esso è compatto, e ogni suo punto è equivalente a un punto in $\mathbb{C} \pmod{L}$. Per cui $\pi(P_z) = X$.

Costruiamo quindi un atlante. Fissiamo $\epsilon > 0$ s.t. $2|\epsilon| < \omega \forall \omega \in L$. Definiamo la mappa $\pi_{|D_z} : D(z, \epsilon) \rightarrow \pi(D_z)$, aperta e continua (perché π lo è), e bigettiva per costruzione di ω (il disco di raggio ϵ avrà sempre un unico rappresentante in $(\text{mod } L)$), quindi un omeomorfismo, quindi $\pi_{|D_z}^{-1}$ una carta su X . Tali carte sono compatibili tra loro: siano ϕ_1, ϕ_2 carte i cui domini hanno intersezione non nulla (altrimenti, non c'è nulla da dimostrare). La funzione $T(z) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_2(\pi(z))$ che è localmente costante per un intorno di z , per come abbiamo definito le carte. **TODO: qui sbaglio qualcosa? il libro fa molto più casino**

Pertanto, il toro complesso è una superficie di Riemann compatta, di genere $g = 1$.

2.1 Curve Proiettive

Linea Proiettiva

Consideriamo $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ linea proiettiva, ossia l'insieme dei sottospazi 1-dimensionali di \mathbb{C}^2 . Ricordiamo che i punti $(x : y) \in \mathbb{C}^2$ sono tali che $(x : y) \sim (\lambda x : \lambda y)$. Allora le mappe $\phi_1 : U_1 = \{y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} : (x : y) \mapsto x/y$ e $\phi_2 : U_2 = \{x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C} : (x : y) \mapsto y/x$ sono bigezioni e $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : s \mapsto 1/s$ che è olomorfa. Quindi le mappe sono compatibili e $\mathcal{A} = \{\phi_1, \phi_2\}$ è un atlante per \mathbb{P}^1 .

Inoltre, U_1, U_2 sono connessi, e hanno intersezione non vuota, quindi \mathbb{P}^1 è connesso. Vogliamo ora mostrare che è T_2 : se $p, q \in U_1$ (risp. U_2) allora esistono due intorni aperti che li separano in \mathbb{C} , e basta prendere la loro controimmagine mediante le carte. Altrimenti, possiamo assumere senza perder di generalità che $p \in U_1 \wedge q \in U_2 \implies p \sim (1 : 0), q \sim (0 : 1)$. Entrambi sono separati dall'aperto controimmagine del disco unitario in \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} \phi_1^{-1} : z &\mapsto (z : 1), & \phi_2^{-1} : z &\mapsto (1 : z) \\ \implies \phi_1^{-1}(D) &= \phi_1^{-1}\{x + iy : x^2 + y^2 < 1\} = \{(1 : x + iy) : x^2 + y^2 < 1\}, \\ \phi_2^{-1}(D) &= \phi_2^{-1}\{x + iy : x^2 + y^2 < 1\} = \{(x + iy : 1) : x^2 + y^2 < 1\} \end{aligned}$$

dove D è la palla di raggio unitario.

Osservazione 2.11. La linea proiettiva \mathbb{P}^1 è compatta, in quanto controimmagine dei due chiusi $\phi_1^{-1}(\overline{D}) \cup \phi_2^{-1}(\overline{D}) = \mathbb{P}^1$.

Spazio Proiettivo

Lo spazio proiettivo \mathbb{P}^2 è l'insieme di tutti i sottospazi 1-dimensionali di \mathbb{C}^3 , ossia il generato di $\langle (x_0, x_1, x_2) \rangle = (x_0 : x_1 : x_2)$, o equivalentemente il quoziente $(\mathbb{C}^3)^* / \cdot$ dove \cdot è l'operazione moltiplicativa definita su \mathbb{C}^* . Consideriamo il ricoprimento

$$U_0 = \{x_0 \neq 0\} \qquad U_1 = \{x_1 \neq 0\} \qquad U_2 = \{x_2 \neq 0\}$$

ognuno omeomorfo a \mathbb{C}^2 - ad esempio $\phi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^2 : (x : y : z) \mapsto (y/x, z/x)$ ha inversa $\phi_0^{-1} : (s, t) \mapsto (1 : s : t)$. Il piano proiettivo \mathbb{P}^2 è compatto perché può esser ricoperto da dei compatti, i poli-dischi unitari su ogni U_i .

Siamo interessati a mostrare che $X = \{F = 0\}$ luogo degli zeri di un polinomio omogeneo di grado d (i.e. tutti i monomi hanno stesso grado d) nonsingolare, è una superficie di Riemann. Chiamo

$$X_0 = X \cap U_0 \simeq \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \text{ s.t. } F(1, a, b) = 0\}$$

la curva affine descritta dal luogo degli zeri di $f(u, v) := F(1, u, v)$, e similmente procedo per le altre componenti.

Osservazione 2.12. La curva F non è ben definita su un generico punto $(x_0 : y_0 : z_0)$ poiché $(\lambda x_0 : \lambda y_0 : \lambda z_0) = (x_0 : y_0 : z_0) \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$ ma $F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = \lambda^d F(x_0, y_0, z_0)$. Tuttavia il luogo degli zeri è ben definito.

Teorema 2.13 (Formula di Eulero). *Tutti i polinomi omogenei F soddisfano:*

$$dF = \sum_i x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

dove d è il grado di F .

Teorema 2.14. *Sia F polinomio omogeneo di grado d . Allora F è nonsingolare sse ogni X_i è una curva affine liscia su \mathbb{C}^2 .*

Dimostrazione. " \implies " fissiamo un X_i . Se esiste un punto singolare $(u_0, v_0) \in \mathbb{C}^2$, esiste soluzione al seguente sistema:

$$f = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

con f definito come sopra. Ma allora:

$$\begin{aligned} F(1 : u_0 : v_0) &= f(u_0, v_0) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1 : u_0 : v_0) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(1 : u_0 : v_0) &= \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = 0, \text{ e (usando 2.1)} \\ \frac{\partial F}{\partial x}(1 : u_0 : v_0) &= dF(1 : u_0 : v_0) - \frac{\partial F}{\partial y}(1 : u_0 : v_0) - \frac{\partial F}{\partial z}(1 : u_0 : v_0) = 0 \end{aligned}$$

che implica X non è liscia in $(1 : u_0 : v_0)$ quindi è una curva singolare.

" \Leftarrow " È sufficiente leggere la dimostrazione di sopra al contrario. □

Proposizione 2.15. *Un polinomio nonsingolare omogeneo è irriducibile.* ¹

Dalla proposizione di sopra, grazie al Teorema 2.10 segue immediatamente che ogni X_i è una superficie di Riemann, con atlante \mathcal{A}_i costituito dalle carte che semplicemente fanno il rapporto delle due componenti per render omeomorfi $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Per verificare che $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ è ancora un atlante, verifichiamo che due carte sono compatibili. Senza perder di generalità consideriamo $p = (x : y : z) \in X_0 \cap X_1 \implies x, y \neq 0$, e le rispettive carte $\phi_0 : (x : y : z) \mapsto y/x$ e $\phi_1 : (x : y : z) \mapsto z/y$. A questo punto, usiamo il teorema della funzione implicita, per cui esiste h olomorfa tale che $\phi_0^{-1}(w) \mapsto (1 : w : h(w))$ da cui $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(w) = h(w)/w$ che è olomorfa ($w \neq 0$ da che $p \in X_1$).

Infine, X è un chiuso su \mathbb{P}^2 compatto, quindi è compatto.

Teorema 2.16. *Il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo nonsingolare in \mathbb{P}^2 è una superficie di Riemann compatta, in cui localmente uno può prendere il rapporto delle coordinate come omeomorfismo a \mathbb{C} .*

Iperpiani Proiettivi

Il sottospazio 1-dimensionale di \mathbb{C}^{n+1} è detto n -spazio proiettivo, denotato \mathbb{P}^n . Se $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ è un polinomio omogeneo, il suo luogo degli zeri è detto *ipersuperficie* di \mathbb{P}^n .

\mathbb{P}^n è sempre un compatto, e questo può esser visto trovando una funzione continua dalla sfera unitaria in \mathbb{C}^n su di esso, o dall'unione di compatti $\{U_i\}_{i=0}^n$ costruiti come sopra, i cui le coordinate sono al più 1.

Definizione 2.17 (Intersezione Completa). Sia $\{F_i\}_{i=1}^n$ una famiglia di n polinomi in $n+1$ variabili su $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Sia $X = \{F_i = 0 \forall i\}$ il loro luogo degli zeri.

X ha un'intersezione completa e liscia se la matrice delle derivate parziali $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ha rango massimo $n - 1$ in ogni punto di X .

La condizione sulla matrice delle derivate parziali è ipotesi per un teorema analogo a quello della funzione implicita, ma su più dimensioni. Esso ci assicura che in ogni punto del piano sia esprimibile il grafo della funzione in termini di $n - 1$ funzioni olomorfe.

Teorema 2.18. *Un'intersezione completa e liscia in \mathbb{P}^n è una superficie di Riemann compatta, in cui uno può scegliere come coordinate locali il rapporto x_i/x_j delle coordinate omogenee.*

In realtà possiamo indebolire le richieste sulla curva che descrive X ed ottenere comunque una superficie di Riemann.

Esempio 2.19. La funzione $H : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3 : (x : y) \mapsto (x^3 : x^2y : xy^2 : y^3)$ è detta *twisted cubic curve*. Essa è descritta da tre equazioni:

$$x_0x_3 = x_1x_2 \qquad x_0x_2 = x_1^2 \qquad x_1x_3 = x_2^2$$

¹La dimostrazione di questo fatto non è presente nel libro.

Definizione 2.20 (Intersezione Locale Completa). Una curva $X \subset \mathbb{P}^n$ data dal luogo degli zeri di una famiglia di funzioni $\{F_i\}$ è detta *curva ad intersezione locale completa* sse $\forall p \in X$ la matrice delle derivate parziali $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ha rango massimo $n - 1$ in p e p può esser localmente descritto in funzione di $n - 1$ equazioni, i.e.

$$F_{\alpha_1} = \cdots = F_{\alpha_{n-1}} = 0$$

ma localmente ne sono sufficienti due per descriverla.

Teorema 2.21. *Ogni curva ad intersezione locale completa è una superficie di Riemann, in cui le carte locali sono date dal rapporto tra le coordinate.*

Capitolo 3

Mappe tra spazi di Riemann

Sia X superficie di Riemann, $W \subset X$ un aperto.

Definizione 3.1 (Oloromorfismo). Una mappa f definita su un intorno $W \ni p$ è detta *oloromorfa* in p se esiste una carta ϕ tale che $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa in $\phi(p)$.

Equivalentemente, una funzione è olomorfa se tutte le carte su cui p è definito sono olomorfe. Infatti, $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa $\implies \forall \psi$ carta $f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1})$ olomorfa in quanto composizione di funzioni olomorfe (l'altro verso è banale).

Similmente, possiamo dire che una funzione f è olomorfa su W sse esiste una famiglia di carte $\{\phi_i : U_i\}_i$ i cui domini U_i ricoprono W tale che $f \circ \phi_i^{-1}(W \cap U_i)$ è un olomorfismo.

Lemma 3.2. *Se f è olomorfa in p allora è olomorfa in un suo intorno.*

Dimostrazione. f olomorfa in $p \iff f \circ \phi^{-1}$ olomorfa in p per qualche carta $\phi \implies f \circ \phi^{-1}$ olomorfa in un intorno di $p \iff f$ olomorfa in un intorno di p . \square

Definizione 3.3 (Singolarità). Sia f una funzione olomorfa definita su un intorno bucato di p , $\phi : U \subset X \rightarrow V$ una generica carta. Allora f è detta avere una *singolarità eliminabile* (risp. *polo*, *singolarità essenziale*) in p se esiste una carta ϕ tale che la composizione $f \circ \phi^{-1}$ ha una singolarità eliminabile (risp. polo, singolarità essenziale) in $\phi(p)$.

Similmente a come facciamo per le funzioni complesse, possiamo determinare il tipo di singolarità analizzando il comportamento di $f(x)$ in un intorno di p :

- se $|f(x)|$ è limitata in un intorno bucato di p , allora f ha una *singolarità eliminabile* in p . In più, se il limite $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ esiste, e definiamo $f(p)$ questo limite, allora $f(p)$ è olomorfa in p ;
- se $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$ allora, f ha un *polo* in p ;
- se il limite di $|f(x)|$ non esiste per $x \rightarrow p$ allora, f ha *singolarità essenziale* in x .

Definizione 3.4 (Meromorfismo). f è detta *meromorfa* in p se è olomorfa, ha una singolarità removibile, o un polo in tale punto. f è detta *meromorfa* su W aperto se risulta meromorfa per ogni $p \in W$.

Denoteremo l'insieme dei meromorfismi su W con $\mathcal{M}(W)$.

Consideriamo f funzione definita olomorfa su un intorno bucato di $p \in X$. Allora, esiste una carta ϕ per cui $f \circ \phi$ risulta olomorfa, quindi è possibile espanderla con la serie di Laurent:

$$(f \circ \phi^{-1})(z) = \sum_n c_n (z - z_0)^n \tag{3.1}$$

dove $z_0 = \phi(p)$ e $z = \phi(x)$ per qualche x vicino a p ; mentre i $\{c_n\}_n$ sono i coefficienti della serie di Laurent. Come nel caso delle funzioni complesse, una f ha una singolarità eliminabile se non vi sono termini negativi; un polo se questi sono finiti; una singolarità essenziale se questi sono infiniti.

Definizione 3.5 (Ordine). Sia f una funzione meromorfa in p , in cui la serie di Laurent per una coordinata z è descritta dalla serie $\sum_n c_n (z - z_0)^n$. L'*ordine* di f , denotato $\text{ord}_p(f) := \arg \min_n c_n$ è il minimo esponente che appare realmente nella serie.

L'ordine $\text{ord}_p(f)$ è ben posto, in quanto indipendente dalla scelta della coordinata locale usata. Infatti, sia $f \in \mathcal{M}(\text{Int}(p))$, allora la sua serie di Laurent per una coordinata locale z rispetto alla carta ϕ è $\sum_n c_n(z - z_0)^n = c_\nu(z - z_0)^\nu + \dots$ dove $\nu = \text{ord}_p(f) \implies c_\nu \neq 0$. Supponiamo esista un'altra carta ψ definita su p , chiamiamo w un punto nelle vicinanze di p rispetto a ψ e $w_0 := \psi(p)$. allora, la funzione di transizione $T = \phi \circ \psi^{-1}$ è olomorfa per definizione e $T' \neq 0$, quindi sarà anch'essa esprimibile come serie di Laurent $z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} a_n(w - w_0)^n$. Sostituendo $(z - z_0)$ nell'equazione di sopra si ottiene:

$$\sum_n c_n(z - z_0)^n = \sum_{n \geq \nu} c_n(z - z_0)^n = \sum_{\substack{n \geq \nu \\ i \geq 1}} c_n a_i^n (w - w_0)^{in} \tag{3.2}$$

in cui il primo termine non-nullo è $c_\nu a_1^\nu (w - w_0)^\nu$, quindi l'ordine è ancora ν .

Proposizione 3.6. *Sia $f \in \mathcal{M}(p \in X)$. Come nel caso complesso, f ha uno zero se il suo ordine è positivo, e f ha un polo se il suo ordine è negativo:*

- $f \in \mathcal{O}(p) \iff \text{ord}_p(f) \geq 0$, e in particolare $f(p) = 0 \iff \text{ord}_p(f) > 0$;
- f ha un polo in $p \iff \text{ord}_p(f) < 0$;
- f non ha né uno zero né un polo in $p \iff \text{ord}_p(f) = 0$.

Lemma 3.7. *Siano $f, g \in \mathcal{M}(p \in X)$. Allora vale:*

- $\text{ord}_p(fg) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(g)$
- $\text{ord}_p(f/g) = \text{ord}_p(f) - \text{ord}_p(g)$
- $\text{ord}_p(1/f) = -\text{ord}_p(f)$
- $\text{ord}_p(f \pm g) = \min\{\text{ord}_p(f), \text{ord}_p(g)\}$

Definizione 3.8 (\mathcal{C}^∞). Una mappa a valori reali è detta di classe \mathcal{C}^∞ sse tutte le sue derivate parziali risultano continue, per ogni ordine.

Una mappa $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + ib \mapsto u(a, b) + iv(a, b)$ è detta di classe \mathcal{C}^∞ sse u, v lo sono in senso reale.

Una mappa $f : X$ definita su una superficie di Riemann è detta di classe \mathcal{C}^∞ in p sse esiste una carta ϕ tale che $f \circ \phi^{-1}$ è \mathcal{C}^∞ su $\phi(p)$.

Teoremi ereditati dall'analisi complessa

Teorema 3.9 (Discretezza di zeri e poli). *Sia f una funzione meromorfa definita su uno spazio connesso. Allora gli zeri e i poli di f formano un insieme discreto.*

Corollario 3.10. *Sia X una superficie di Riemann compatta. Allora tutte le sue funzioni meromorfe hanno numero finito di zeri e poli.*

Teorema 3.11 (Principio di Identità). *Siano f, g definite su un aperto connesso W . Se $f = g$ su un insieme $S \subset W$ con un punto limite in W , allora $f = g$ su tutto W .*

Teorema 3.12 (Principio del Massimo Modulo). *Sia $f \in \mathcal{O}(W)$ con W aperto connesso di X superficie di Riemann. Allora*

$$\exists p \in W \text{ s.t. } |f(x)| < |f(p)| \forall x \in W \implies f \text{ costante su } W.$$

Segue il primo teorema prettamente inerente le superfici di Riemann.

Teorema 3.13. *Sia X una superficie di Riemann compatta. Allora $\forall f \in \mathcal{O}(X)$, f è costante.*

Dimostrazione. Se f è olomorfa su un compatto, allora $|f|$ ammette massimo poiché X compatto, ma se ammette massimo allora è costante per il Principio del Massimo Modulo. \square

3.1 Funzioni meromorfe sulla Sfera di Riemann

Teorema 3.14. *Tutte le funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann sono esprimibili come funzioni razionali.*

Dimostrazione. Poiché f meromorfa su un compatto, f ha un numero finito di singolarità $\{\lambda_i\}_i$ di ordini $\{e_i\}_i$. Mi creo una funzione artificiosa r , che so esser meromorfa, e mostro che il rapporto f/r è costante:

$$r(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i}$$

ha stessi zeri e poli di f , con stesso ordine. Il rapporto $g = f/r$ non ha zeri né poli, quindi è olomorfa su tutto \mathbb{C}_∞ , quindi posso esprimerla come serie di Taylor centrata in zero:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_n c_n z^n$$

serie convergente su tutto \mathbb{C} . Ma allora $g(w) = \sum_n c_n (w)^{-n}$ è meromorfa, e ha al più un polo in zero. Tuttavia, se questo fosse il caso, dovrebbe essere una sommatoria finita di termini, i.e. g dovrebbe essere un polinomio in z , e tale zero sarebbe stato incluso in $\{\lambda_i\}_i$, visto che \mathbb{C} è algebricamente chiuso. Dobbiamo concluderne quindi che f/r è costante, quindi f è una funzione razionale. \square

Corollario 3.15. *Tutte le funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann sono tali che:*

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal fatto che tutte le funzioni meromorfe su \mathbb{C}_∞ sono razionali:

$$\begin{aligned} f \text{ meromorfa} &\implies f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \implies f(z) = \prod_i (z - \lambda_i)^{e_i} \\ &\implies \text{ord}_{\lambda_i}(f) = e_i, \quad \text{ord}_\infty(f) = -(\deg p - \deg q) = -\sum_i e_i, \quad \text{ord}_{z \neq \lambda_i, \infty}(f) = 0 \\ &\implies \sum_z \text{ord}_z(f) = 0. \end{aligned}$$

\square

3.2 Funzioni meromorfe sulla Linea Proiettiva

Vale la pena notare che un polinomio $p(z, \omega) \in \mathbb{C}^2$ è tale che $p(\lambda z, \lambda \omega) = \lambda^d p(z, \omega)$ quindi tutte le funzioni razionali $r = p/q$ rapporti tra polinomi omogenei dello stesso grado sono \mathbb{C}^* -invarianti.

Possiamo sfruttare questo fatto per affermare che tutti i rapporti tra polinomi omogenei dello stesso grado sono meromorfismi su \mathbb{P}^1 . Infatti, per la carta $\{\omega \neq 0\}$ ottengo che la composizione

$$r \circ \phi_1^{-1}(u) = r(u : 1) = \frac{p(u, 1)}{q(u, 1)}$$

è un meromorfismo in \mathbb{C} . Similmente si procede per l'altra carta.

Teorema 3.16. *Tutte le funzioni meromorfe sulla linea proiettiva sono rapporti di polinomi omogenei dello stesso grado.*

Dimostrazione. Sia f una funzione meromorfa su \mathbb{P}^1 non identicamente nulla. Allora ha numero finito di singolarità $\{(a_i : b_i)\}_i$ con rispettivi ordini $\{e_i\}_i$. Creo una funzione artificiosa r avente stesse singolarità di f , con uguale ordine:

$$r(z, w) = \omega^n \prod_i (b_i z - a_i \omega)^{e_i} \quad \text{in cui } n = -\sum e_i$$

Notiamo che $\text{ord}_{(a_i : b_i)}(f) = e_i$, e il polinomio omogeneo per via di $\omega^n = -\sum_i e_i$.

Allora $g = f/r$ non ha poli o zeri, alla peggio un polo in $w = 0$ (quindi nel punto $(1 : 0)$) di ordine n . Questo però implicherebbe che $1/g$ ha uno zero in $(1 : 0)$ quindi $1/g$ è olomorfa su tutto un compatto, quindi è identicamente 0. Giacché questo andrebbe contro l'ipotesi di f , siamo costretti a conseguirne che g non ha poli, quindi che è olomorfa su un compatto, quindi è costante. \square

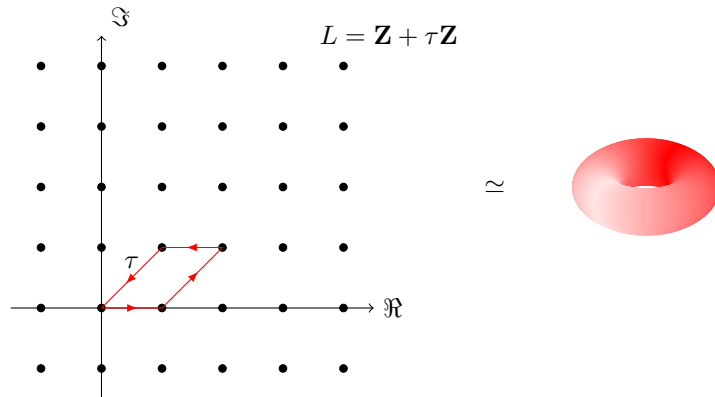
Una immediata conseguenza del fatto che tutte le funzioni meromorfe su \mathbb{P}^1 hanno lo stesso grado è che la somma degli ordini è nulla:

Corollario 3.17. *Sia f mappa noncostante meromorfa su \mathbb{P}^1 . Allora*

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0$$

3.3 Funzioni meromorfe sul Toro Complesso

Consideriamo $X = \mathbb{C}/L$ dove il reticolo $L = \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ è tale che $\Im(\tau) > 0$.



Osservazione 3.18. Tutti i tori complessi sono isomorfi a $\mathbb{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$.

Dimostrazione. Siano e e $\Lambda = \omega_1\mathbf{Z} + \omega_2\mathbf{Z}$ (ω_1, ω_2 lin. indep. su \mathbb{R}) due reticoli da cui quozientiamo per ottenere un toro.

Sia $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Definiamo $\varphi_\alpha : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\alpha\Lambda : [x]_\Lambda = x + \Lambda \mapsto \alpha x + \alpha\Lambda = [x]_{\alpha\Lambda}$. Tale funzione è banalmente bigettiva (perché α invertibile), è un morfismo di gruppo, ed è un isomorfismo ¹ perché $(\times\alpha)$ olomorfa.

Basta fissare $\alpha = \omega_1^{-1}$ e otteniamo $\alpha\Lambda = L = \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ ($\Im(\tau) > 0$). □

Non possiamo comportarci esattamente come nei casi precedenti, poiché tutti i rapporti di funzioni olomorfe L -periodiche risultano olomorfe su \mathbb{C}/L compatto, quindi sono costanti. Allora scegliamo una funzione quasi-periodica, tipo la *theta-function*:

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[n^2\tau + 2nz]} \tag{3.3}$$

Notiamo che:

$$\begin{aligned} \theta(z+1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[n^2\tau + 2nz]} e^{\pi i 2n} = \theta(z) && [\implies \text{la funzione è periodica}] \\ \theta(z+\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[n^2\tau + 2nz + 2n\tau]} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[\tau(n+1)^2 - \tau + 2nz]} && [\text{completamento del quadrato}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[\tau n^2 - \tau + 2nz - 2z]} && [n \leftarrow n-1] \\ &= \theta(z) e^{-\pi i(\tau + 2z)} \end{aligned}$$

La funzione converge assolutamente:

$$\theta(z) = \sum_n f_n \quad \text{con } |f_n| = e^{i\pi[n^2\tau + 2nz]} = e^{i\pi[n^2\Re(\tau) + 2n\Re(z)]} e^{-n^2\pi[\Im(\tau) + 2\Im(z)/n]}$$

¹ La Definizione 3.32 stabilisce isomorfismi tra superfici di Riemann.

Il primo fattore è sempre superiormente limitato, e altrettanto vale per il secondo, visto che abbiamo un quadrato. Quindi $|f_n|$ converge, quindi $\sum_n |f_n|$ converge per l'M-test di Wierstrass.

Voglio contare gli zeri e i poli. So già per certo che la funzione $\theta(x)$ non ha poli. Per contare gli zeri, posso usare il Principio dell'Argomento (Teorema 1.25):

$$\begin{aligned} \theta'(z + \tau) &= \theta'(z)e^{-i\pi(2z+\tau)} + \theta(z)e^{-i\pi(2z+\tau)}(-2\pi i) \\ \implies \frac{\theta'(z + \tau)}{\theta(z + \tau)} &= \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - 2\pi i \\ \implies Z &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\tau+1} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^1 \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz - \int_\tau^{\tau+1} \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left[\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} - \frac{\theta'(z + \tau)}{\theta(z + \tau)} \right] dz = 1. \end{aligned}$$

Nota: quell'integrale possiamo spezzarlo in quel modo perché stiamo integrando sul bordo di un parallelogramma, e i due lati laterali (TODO: per qualche ragione) si cancellano. Abbiamo solo uno zero. Affermo che lo zero cercato è $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$. Per dimostrarlo, definisco una nuova funzione θ_ζ tale che $\exists \sigma . \theta(\sigma) = 0 \iff \exists \sigma . \theta_\sigma(0) = 0$. Quindi, dato un $\zeta = \tau a + b$:

$$\theta_\zeta(z) = \sum_m e^{i\pi[(n+a^2)\tau+2(n+a)(z+b)]}$$

ha gli stessi zeri di θ . Infatti:

$$\begin{aligned} \theta(z + \zeta) &= \sum_n e^{i\pi[n^2\tau+2nz+2na\tau+2nb]} \\ &= \sum_n e^{i\pi[\tau(n+a)^2 - a^2\tau + 2(n+a)(z+b) - 2a(z+b)]} \\ &= \theta_\zeta(z) \cdot e^{i\pi[-a^2\tau - 2a(z+b)]}. \end{aligned}$$

A questo punto, mi basta dimostrare che la funzione θ_σ è dispari, i.e. $\theta_\sigma(-z) = -\theta_\sigma(z)$:

$$\begin{aligned} \theta_\sigma(-z) &= \\ &= \sum_n e^{i\pi[(n+1/2)^2\tau+2(n+1/2)(-z+1/2)]} && [\sigma = 1/2 + \tau/2] \\ &= \sum_n e^{i\pi[(n+1/2)^2\tau+2(n+1/2)(-z+1/2)]} && [n \leftarrow -n - 1] \\ &= \sum_n e^{i\pi[(-n-1/2)^2\tau+2(-n-1/2)(-z-1/2+1)]} \\ &= \sum_n e^{i\pi[(n+1/2)^2\tau+2(n+1/2)(z+1/2)-2n-1]} \\ &= \sum_n e^{i\pi[(n+1/2)^2\tau+2(n+1/2)(z+1/2)]} e^{-2\pi i n} e^{-i\pi} \\ &= -\theta(z). \end{aligned}$$

Segue che tutti gli zeri di θ su \mathbb{C} sono $1/2 + \tau/2 + m + \tau n \forall m, n \in \mathbf{Z}$. Considero quindi il traslato:

$$\theta^{(x)}(z) = \theta(z - 1/2 - \tau/2 - x)$$

che ha come soluzioni $x + L$; e

$$\theta^{(x)}(z + 1) = \theta^{(x)}(z) \quad \theta^{(x)}(z + \tau) = -e^{-2\pi i(z-x)} \theta^{(x)}(z).$$

TODO: dimostrarlo. Vogliamo fare in modo che una funzione costruita su θ risulta periodica. Considero, presi una collezione di zeri $\{x_i\}_i^m$ e di poli $\{y_i\}_i^n$, la funzione:

$$R(z) = \frac{\prod_i \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_i \theta^{(y_i)}(z)}.$$

Per affermare che quest'ultima è L -perdiodica, rimane mostrare che $R(z + \tau) = R(z)$, infatti sappiamo già che $R(z) = R(z + 1)$.

$$\begin{aligned} R(z + \tau) &= \frac{\prod_{i=1}^m \theta^{(x_i)}(z + \tau)}{\prod_{i=1}^n \theta^{(y_i)}(z + \tau)} \\ &= (-1)^{m-n} e^{-2\pi i[(m-n)z + \sum y_i - \sum x_i]} \frac{\prod_{i=1}^m \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_{i=1}^n \theta^{(y_i)}(z)} \\ &= R(z) \\ \iff m - n = 0 \wedge \sum_i x_i - \sum_i y_i \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Quindi possiamo costruire una funzione L -periodica $R(z)$ presa una collezione di zeri e poli, in egual numero, con somma differente per un intero.

Proposizione 3.19. *La funzione $R(z)$ è L -periodica e meromorfa su \mathbb{C} , quindi R viene proiettata su una funzione meromorfa in \mathbb{C}/L .*

Proposizione 3.20. *Siano $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ due multi-set di d punti sul toro complesso $X = \mathbb{C}/L$. Mostra che esistono $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ preimmagini su \mathbb{C} tali che $\pi(p_i) = x_i$, $\pi(q_i) = y_i$, e $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ sse $\sum_i p_i = \sum_i q_i$ somma nella legge di gruppo quoziente di X .*

Dimostrazione. “ \implies ” è banale: $\sum_i x_i = \sum_i y_i \implies \pi(\sum_i x_i) = \pi(\sum_i y_i) \implies \sum_i \pi(x_i) = \sum_i \pi(y_i)$.

“ \impliedby ”. Abbiamo $\sum_i p_i = \sum_i q_i$. Quindi esistono preimmagini in \mathbb{C} la cui immagine secondo π sono i rispettivi p_i , q_i . Una volta individuata una preimmagine x_i o y_i (essa esiste sempre poiché π è surgettiva), tutte le altre saranno della forma $x_i + m + n\tau$ con m, n interi. Ma allora

$$\sum_i (x_i + m_i + n_i\tau) = \sum_i (y_i + m'_i + n'_i\tau) \quad \forall m, m', n, n' \in \mathbf{Z} \implies \sum_i x_i + dm + dn\tau = \sum_i y_i + dm + dn\tau. \quad \square$$

Lemma 3.21. *Tutte le funzioni f noncostanti meromorfe sul toro complesso sono tali che:*

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0.$$

Dimostrazione. Assumiamo, a meno di isomorfismo, che f meromorfa sia definita sul toro \mathbb{C}/L con L reticolo definito sopra. Assumiamo per assurdo che vi siano più poli che zeri. Se questo non fosse il caso, basta prendere $1/f$. Abbiamo allora $\{p_i\}_{i=0}^n$ zeri e $\{q_i\}_{i=0}^m$ poli con $n < m$. Aggiungiamo un po' di zeri p_{n+1}, \dots, p_m a caso. e chiamiamo rispettivamente x_i e y_i le preimmagini di p_i , q_i . Scegliamo le preimmagini di modo che $\sum_i x_i = \sum_i y_i$ su \mathbb{C} , che equivale a chiedere che $\sum_i p_i = \sum_i q_i \pmod{L}$.

Consideriamo la funzione $R(z) = \frac{\prod_i \theta^{(x_i)}(z)}{\prod_i \theta^{(y_i)}(z)}$ usando questi punti. Allora $g := R/f$ è meromorfa, senza poli, con $m - n$ zeri che ho aggiunto; quindi è olomorfa su tutto il toro (che è compatto). Quindi per il Principio di Identità è costante, ma questo è un assurdo poiché R non è costante. \square

Proposizione 3.22. *Tutte le funzioni meromorfe su superfici di Riemann sono della forma $kR(z)$ $k \in \mathbb{C}$.*

3.4 Funzioni meromorfe su Curve Affini Lisce

Teorema 3.23 (Hilbert's Nullstellensatz). *Sia h un polinomio che risulta nullo su tutti i punti in cui un altro polinomio f , irriducibile, svanisce. Allora $f \mid h$.*

Sia $X = \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^2$ con f curva liscia affine. Allora tutti i polinomi razionalizzati risultano esser funzioni meromorfe su X - poiché $x \rightarrow x$ è un olomorfismo, a meno che il denominatore non risulti sempre nullo. Rissumendo con maggiore precisione quanto detto: $g = p/q$ meromorfismo $\iff q(x, y)$ non è identicamente nulla $\forall (x, y) \in X \iff q(x, y)$ non è nulla su tutti i punti in cui f è nulla $\iff f \nmid q$ per il Nullstellensatz di Hilbert.

Teorema 3.24. *Sia $X = \{f = 0\}$ superficie di Riemann definita dal luogo degli zeri di un polinomio nonsingolare irriducibile. Allora un qualsiasi polinomio razionale $g/h : X$ è una funzione meromorfa, a patto che $f \nmid h$.*

Esiste una facile estensione del Nullstellesatz per il piano proiettivo. È quindi possibile fare lo stesso discorso visto prima, considerando ogni carta singolarmente.

Corollario 3.25. *Sia $X = \{F = 0\}$ superficie di Riemann definita dal luogo degli zeri di un polinomio omogeneo nonsingolare. Allora un qualsiasi rapporto tra polinomi G/H aventi lo stesso grado è un meromorfismo su X se $F \nmid H$.*

3.5 Funzioni meromorfe su Curve Proiettive Lisce

Definizione 3.26 (Embedding Oloromorfo). Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una superficie di Riemann. Diciamo che X è *oloromorficamente incorporato* in \mathbb{P}^n se $\forall p \in X \exists z_j$ s.t. :

- $z_j \neq 0$
- $z_k \mapsto z_k/z_j$ è olomorfa $\forall k$ su un intorno di p ;
- vi è una coordinata z_i tale che z_i/z_j è una locale coordinata su X per un intorno di p .

Definizione 3.27 (Curva Proiettiva Liscia). Una curva embeddata olomorficamente è detta *curva proiettiva liscia*.

Sostanzialmente la richiesta di *embedding olomorfo* su \mathbb{P}^n corrisponde al chiedere un modo per esprimere localmente le coordinate come $(1 : z : g_1(z) : \dots : g_{n-1}(z))$ dove g_i sono funzioni olomorfe - grafici -, z è una coordinata locale su X e 1 è la coordinata sempre non-nulla. Essenzialmente, questa è la rappresentazione che abbiamo usato per parlare di curve ad intersezione locale completa. Infatti, vale la seguente Proposizione:

Proposizione 3.28. *Una qualsiasi curva ad intersezione locale completa è una curva proiettiva liscia.*

Proposizione 3.29. *Qualsiasi rapporto di polinomi omogenei G/H aventi stesso grado è una funzione meromorfa su una curva proiettiva liscia X , salvo $H = 0$ su tutto X .*

Dimostrazione. Preso un punto $p \in X$, posso esprimere ogni coordinata in un intorno di p come rapporto $z_i/z_k = (z_i/z_j)/(z_k/z_j)$, dove z_j è la coordinata non nulla descritta nella definizione di embedding olomorfo. Tale è un rapporto di funzioni olomorfe, quindi è una funzione meromorfa, quindi ogni polinomio razionale costruito su essa è una funzione meromorfa. Segue la tesi. \square

3.6 Mappe olomorfe tra Superfici di Riemann

Definizione 3.30 (Olomorfismi tra Superfici di Riemann). Una mappa $F : X \rightarrow Y$ è detta *oloromorfa* in p se esistono carte $\phi : p \in U_1 \rightarrow W_1$ su X e $\psi : F(p) \in U_2 \rightarrow W_2$ su Y tali che $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ è olomorfa in $\phi(p)$.

Come abbiamo già visto, questo è equivalente a chiedere (i) che F sia olomorfa rispetto a *qualsiasi* paio di carte su X, Y che rispettino le condizioni di inclusione ($p, F(p)$ rispettivamente), oppure (ii) che ve ne sia una collezione.

Lemma 3.31 (Proprietà delle mappe olomorfe).

- (a) tutte le mappe olomorfe sono continue e \mathcal{C}^∞ ;
- (b) la composizione di mappe olomorfe è un olomorfismo;
- (c) la composizione di mappe olomorfe con funzioni olomorfe (i.e., sulla superficie) è un olomorfismo;
- (d) la composizione di mappe olomorfe con funzioni meromorfe è un meromorfismo.

Si ha quindi che

$$F^* : \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(F^{-1}(W)) \qquad F^* : \mathcal{M}_Y(W) \rightarrow \mathcal{M}_X(F^{-1}(W))$$

dove $F^*(g) = F \circ g$ sono omeomorfismi.

Definizione 3.32 (Isomorfismo tra Superfici di Riemann). Una mappa $F : X \rightarrow Y$ è detta *isomorfismo* se bigettiva e bioloromorfa. Se $Y = X$ allora la mappa è detta *automorfismo*.

Teorema 3.33 (Teorema della Mappa Aperta). *Tutte le mappe olomorfe noncostanti tra superfici di Riemann sono aperte.*

Segue quindi che tutte le mappe olomorfe e bigettive tra superfici di Riemann sono isomorfismi: ²

Proposizione 3.34. *L'inversa di una mappa olomorfa è automaticamente olomorfa. In particolare, se $F : X \rightarrow Y$ è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann, allora $X \simeq F(X)$.*

Teorema 3.35 (Teorema d'Identità). *Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa tra superfici di Riemann tale che $F = G$ su un aperto Ω avente un punto limite in X . Allora $F = G$ su tutto X .*

²Per una dimostrazione che l'inversa di una funzione olomorfa è ancora olomorfa, vedere la Proposizione 1.15.

Proposizione 3.36. *Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa (noncostante) olomorfa tra superfici di Riemann in cui X è compatto. Allora F è surgettiva su Y compatto.*

Dimostrazione. F olomorfa, X compatto $\implies F$ aperta, X compatto $\implies F(X)$ aperto, $F(X)$ compatto su un $T_2 \implies F(X)$ aperto e chiuso su un connesso $\implies Y = F(X)$ compatto. \square

Proposizione 3.37 (Discretezza delle Preimmagini). *Sia $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$. Allora $\forall y \in Y$ $F^{-1}(y)$ è un sottoinsieme discreto di X ; in particolare, se X è compatto, allora $F^{-1}(y)$ è un insieme finito e nonvuoto.*

Dimostrazione. Fissata $y \in Y$, esiste una coordinata locale z centrata in y , e per un $x \in F^{-1}(y)$ esiste una coordinata locale w centrata in x . Allora possiamo esprimere le due coordinate in funzione di una mappa olomorfa noncostante $z = g(w)$ con uno zero nell'origine. Poiché gli zeri di mappe noncostanti sono discreti, segue che x è l'unica preimmagine di y per un intorno $\text{Int}(y)$, quindi $F^{-1}(y)$ è discreto.

La seconda proposizione segue immediatamente dal fatto che F è surgettiva (la proposizione di sopra, Proposizione 3.36), e sottoinsiemi discreti di compatti sono finiti (Proposizione 1.28) \square

Lemma 3.38. *C'è una corrispondenza 1-1 tra le funzioni meromorfe $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ e le mappe olomorfe $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ (non identicamente ∞).*

Dimostrazione. Basta definire

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ non è un polo di } f \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

perché tanto $f(x) \in \mathbb{C}$ per tutti gli x che non sono poli. \square

Proprietà globali delle superfici di Riemann

Teorema 3.39 (Local Normal Form). *Sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfa noncostante. $\forall x \in X$ e per ogni carta ϕ_2 centrata in $F(x)$ esiste una carta centrata in p tale che l'espressione locale di F è $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) = z^m$ per un unico $m \geq 1$. Tale m dipende solo dal punto scelto, e non dalle carte.*

Dimostrazione. Scegli una qualsiasi carta ϕ_2 su Y centrata in $F(p)$, e una carta ψ centrata in $p \in X$. Usiamo Taylor:

$$\begin{aligned} T(w) &= \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}(w) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^i && [m \text{ è l'ordine dello zero in } T(0) = 0] \\ &= w^m \sum_{i=m}^{\infty} c_i w^{i-m} = w^m h(w) && [\text{per qualche funzione olomorfa in } 0 \text{ } h \text{ non nulla in } 0] \\ &= (ws(w))^m && [\exists s \text{ olomorfa s.t. } s^m = h] \\ &= \eta^m(w), \end{aligned}$$

con η olomorfa invertibile (per il Teorema della Funzione Implicita) con derivata non nulla in 0. Possiamo quindi interpretare η come una funzione che effettua un cambio di coordinate $z = \eta(w) = ws(w)$. Allora fisso $\phi_1 = \eta \circ \psi$. Tale funzione è una carta e appartiene al mio atlante, centrata in p . Pertanto:

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}(z) &= \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1} \circ \eta^{-1}(z) \\ &= T \circ \eta^{-1}(z) \\ &= T(w) \\ &= (ws(w))^m \\ &= z^m \end{aligned}$$

Vogliamo infine mostrare che è unica. Notiamo che per ogni punto la mappa F è della forma $z \mapsto z^m$ quindi vi sono esattamente m preimmagini e il valore di m , quindi F è un ricoprimento ad m fogli in p , e quindi dipende solo dalle proprietà topologiche della funzione, e non dalla scelta della coordinata. \square

Definizione 3.40 (Molteplicità). La *molteplicità* $\text{mult}_p(F)$ di F è quell'unico intero tale che, per un'espressione locale di p ed $F(p)$, la mappa F risulta essere della forma $z \mapsto z^m$.

Abbiamo quindi che per una funzione $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ noncostante, negli intorni di un punto $p \in X$ esiste una funzione $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C})$ che mi rappresenta localmente le coordinate sui complessi:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & Y \\ \phi_i \downarrow & & \downarrow \psi_i \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{h} & \mathbb{C} \end{array}$$

Proposizione 3.41. *Sia $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$, $p \in X$. Su un intorno di p troviamo una funzione h olomorfa che mandi un'espressione locale per p in un'espressione locale per $F(p)$, i.e. tale che $w = h(z)$; in particolare z_0 e w_0 i corrispettivi di p ed $F(p)$. Allora: $\text{mult}_p(F) = 1 + \text{ord}_{z_0}(dh/dz)$.*

Dimostrazione. Considerando l'espansione di Taylor per $w - w_0$, che è centrata e soddisfa quindi il Local Normal Form), si ha $w - w_0 = h(z) - h(z_0) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i(z - z_0)^i \implies h'(z) = \sum_{i=m}^{\infty} i c_i(z - z_0)^{i-1} \implies \text{ord}_{z_0} h' = m - 1$. \square

Corollario 3.42. *I punti di molteplicità almeno due formano un insieme discreto.*

Dimostrazione. Basti notare che h è una funzione olomorfa, quindi gli zeri della sua derivata sono discreti. \square

Definizione 3.43 (Punto di Ramificazione). $p \in X$ è detto *punto di ramificazione* di $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ sse $\text{mult}_p(F) \geq 2$, e $F(p) \in Y$ è detto *punto di diramazione*.

Lemma 3.44. *Sia $X = \{f(x, y) = 0\}$ una curva affine liscia. Allora la funzione $\pi : X \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto x$ è ramificata in $p = (x_0, y_0) \in X$ sse $(df/dy)(p) = 0$.*

Dimostrazione.

- Se $(df/dy)(p) \neq 0$ allora π è una carta per X e ha sicuramente molteplicità 1.
- Se $(df/dy)(p) = 0$ allora $(df/dx)(p) \neq 0$ perché la funzione è liscia, quindi per il teorema della funzione implicita possiamo esprimere y mediante una funzione olomorfa g s.t. $f(g(y), y) = 0 \forall y \in \text{Int}(y_0)$. Quindi, facendo la derivata di f così espressa, $(df/dy) = (df/dx)g'(y) + (df/dy) = (df/dx)g'(y) = 0$ in un intorno di p . Questo implica che $g'(y_0) = 0$ poiché $(df/dy)(p) = 0$ e $(df/dx)(p) \neq 0$. Quindi g' , espressione locale per π in un intorno di p , ha ordine positivo, e per la proposizione 3.41 segue che p è un branch point. \square

Un discorso analogo si può fare per il caso proiettivo: se X è un piano proiettivo liscio definito dal luogo degli zeri di un polinomio omogeneo $F(x : y : z) = 0$ allora la mappa $G : X \rightarrow \mathbb{P}^1 : (x : y : z) \mapsto (x : z)$ ha punti di ramificazione in p sse $\frac{\partial F}{\partial y}(p) = 0$ - si dimostra allo stesso modo usando come espressione locale la mappa $f(x, y) = F(x : y : 1) = 0$.

Lemma 3.45. *Sia $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow \mathbb{C}_{\infty})$ e $f \in \mathcal{M}(X \rightarrow \mathbb{C})$ la mappa associata ad F . Allora, $\forall p \in X$:*

- se p è uno zero, $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f)$;*
- se p è un polo, $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$;*
- se p non è né un zero né un polo, $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.*

Dimostrazione. Se p non è un polo, abbiamo che $f - f(p)$ ha uno zero in p , quindi per il Proposizione 3.41 $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$; se p è un polo, allora p è uno zero di $1/f$ quindi $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$. \square

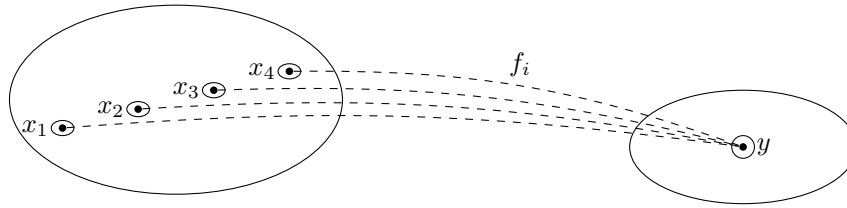
Definizione 3.46 (Grado). Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa olomorfa noncostante tra superfici di Riemann compatte. Definiamo $\forall y \in Y$ il grado di F come la somma delle molteplicità nella sua controimmagine, i.e.:

$$\text{deg}(F) = d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F)$$

Proposizione 3.47. *Il grado è indipendente da y .*

Dimostrazione. Procediamo mostrando che localmente la funzione $y \rightarrow d_y(F)$ è costante. La tesi seguirà dal fatto che una funzione localmente costante su un connesso è costante.

Procediamo quindi mostrando che c'è un intorno aperto dove $d_y(F)$ risulta costante.



Ora, fissiamo un y , ci prendiamo le controimmagini $\{x_i\}_i$ con rispettive molteplicità $\{m_i\}_i$. Tali molteplicità sono costanti su ogni intornino di x_i poiché per il Local Normal Form sappiamo che ogni coordinata può esser localmente espressa come $f_i : z \mapsto z^{m_i}$ dove f_i è la local normal form per un intornino di x_i . In f , lo zero va in zero m_i volte, e tutti gli altri punti hanno m_i radici. Quindi per tutto un piccolo intornino di y ci saranno le stesse controimmagini con le stesse molteplicità.

Nulla però ci garantisce che, per un intornino di y , queste siano le *uniche* controimmagini. Assumiamo per assurdo che vi sia una successione di elementi di X tali che le immagini di questi punti convergono a y , ma nessuno di loro sta in un intornino di qualche x_i . Questa successione di elementi vive in un compatto, quindi ammette una sottosuccessione convergente, diciamo ad un punto $x \in X$. Inoltre, F è continua, quindi dev'esser $F(x) = y \implies x$ è una controimmagine di y , quindi uno degli x_i , ma questa è una contraddizione.

Dobbiamo quindi concludere che localmente ci sono le stesse controimmagini con le stesse molteplicità, quindi il grado è lo stesso localmente. \square

Proposizione 3.48. *Una mappa $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ noncostante (tra superfici compatte) è un isomorfismo sse $\deg(F) = 1$.*

Dimostrazione. È olomorfa, quindi ha inversa olomorfa (Proposizione 3.34); è bigettiva: è un isomorfismo. \square

Proposizione 3.49. *Se X è una superficie di Riemann per cui esiste $f \in \mathcal{M}(X \rightarrow \mathbb{C})$ con un solo polo semplice, allora $X \simeq \mathbb{C}_\infty$.*

Dimostrazione. $f \in \mathcal{M}(X \rightarrow \mathbb{C})$ con un *unico* polo semplice in p , allora la corrispettiva mappa $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ha molteplicità uno in $p \mapsto \infty$. Quindi è di grado uno, quindi è un isomorfismo. \square

Con la struttura sviluppata in questa sezione, possiamo dimostrare che la somma degli ordini su una superficie di Riemann compatta è nulla, cosa che avevamo visto nel caso specifico di alcune superfici.

Proposizione 3.50. *Sia f una mappa noncostante meromorfa su una superficie di Riemann compatta. Allora*

$$\sum_p \text{ord}_p(f) = 0$$

Dimostrazione. Considero la corrispondente mappa meromorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, e considero le famiglie $\{x_i\}_i$ di controimmagini dello zero, e $\{y_j\}_j$ controimmagini di ∞ (i poli di f). Allora per definizione di grado abbiamo che $d = \deg F = \sum_i \text{mult}_{x_i}(F) = \sum_j \text{mult}_{y_j}(F)$. Sfruttando il legame tra ordine e molteplicità, e che l'ordine è nullo in un punto diverso da un polo o uno zero, abbiamo che $\sum_p \text{ord}_p(F) = \sum_i x_i - \sum_j y_j = d - d = 0$. \square

3.7 Formula di Riemann-Hurwitz

Teorema 3.51 (Riemann-Hurwitz Formula). *Sia $F : X \rightarrow Y$ una mappa olomorfa noncostante tra superfici di Riemann compatte. Allora:*

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p(F) - 1)$$

Capitolo 4

Curve Iperellittiche

Sia $h \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio di grado $\deg(h) = 2g + \epsilon$ con $\epsilon = 1, 2$. Definiamo: $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \supset X = \{y^2 = h(x)\}$ una curva affine liscia e poi $k(z) = z^{2g+2}h(z^{-1})$ polinomio di grado $2g + \epsilon$. Allora $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \supset Y = \{w^2 = k(z)\}$ è un'altra curva affine liscia. Definisco infine $U := X - \{0\} = \{(x, y) \in \mathbb{A} \text{ s.t. } x \neq 0\}$ e $V = Y - \{0\} = \{(z, w) \in \mathbb{A} \text{ s.t. } z \neq 0\}$

Una *curva iperellittica* è la superficie di Riemann ottenuta mediante $(X \cup Y)/\varphi$, dove $\varphi : U \rightarrow V : (x, y) \mapsto (1/x, y/x^{g+1})$, ottenuta incollando insieme le due superfici.

Proposizione 4.1 (Proprietà). Z è una superficie di Riemann (i), compatta (ii), di genere g (iii), ed esiste una mappa $\pi \in \mathcal{M}(Z \rightarrow \mathbb{C}_{\infty} \simeq \mathbb{CP}^1)$ di grado due i cui branch point sono le radici di h (iv).

Dimostrazione.

- (i) Possiamo definire una struttura complessa su Z nel modo seguente: ?? Infine, Z è T_2 e connesso perché X, Y lo sono; quindi Z è una superficie di Riemann.
- (ii) Z è compatto, in quanto unione dei due insiemi compatti

$$\{(x, y) \in X \text{ s.t. } \|x\| \leq 1\} \quad e \quad \{(z, w) \in Y \text{ s.t. } \|z\| \leq 1\}$$

- (iii) definisco la mappa in questo modo:

$$\pi : Z \rightarrow \mathbb{CP}^1 \quad \pi(p) = \begin{cases} (x : 1) & \text{se } p \in X \\ (1 : z) & \text{se } p \in Y \end{cases}.$$

Tale mappa è ben definita(??) e per ogni x fissato abbiamo due possibili punti., quindi $\deg(\pi) = 2$.

- (iv) Fissato un punto nell'immagine, possiamo notare che questo può avere o due controimmagini distinte con molteplicità 1, o un'unica controimmagine con molteplicità 2: quest'ultimo è il caso di tutte le radici di h , ossia per $2g + 2$ punti quando il grado di h è dispari, o $2g + 1$ punti e ∞ quando h ha grado dispari. Usiamo la formula di Hurwitz:

$$\begin{aligned} 2g(Z) - 2 &= \deg \pi (2g(\mathbb{C}_{\infty}) - 2) + \sum_p [\text{mult}_p(\pi) - 1] \\ &= 2(2 \cdot 0 - 2) + (2g + 2) \\ &= 2g - 2. \end{aligned} \quad \square$$

C'è inoltre questa cosa carina, che possiamo definire un automorfismo sulla superficie molto facile: $\sigma : Z \rightarrow Z : (x, y) \mapsto (x, -y)$. σ è un'*involutione*, ossia $\sigma \circ \sigma = \mathbf{1}$. Inoltre commuta rispetto alla proiezione $\pi : Z \rightarrow \mathbb{C}_{\infty}$ nel senso che $\pi \circ \sigma = \pi$. Spesso questa funzione viene chiamata *involutione iperellittica*.

Capitolo 5

Forme differenziali

Tutto questo capitolo è dedicato al trasporto della teoria dell'integrazione sulle superfici di Riemann.

Definizione 5.1. Una *holomorphic 1-form* di un aperto $V \subset \mathbb{C}$ è un'espressione ω della forma

$$\omega = f(z)dz$$

dove $f \in \mathcal{O}(V \rightarrow \mathbb{C})$. Diremo allora che ω è una holomorphic 1-form on V nella coordinata z .

Su queste 1-forme vogliamo dare una nozione di compatibilità che mi possa permettere di comportarmi come se usassi la *chain rule*:

Definizione 5.2 (1-forma olomorfa). Date due *holomorphic 1-form* $\omega_1 = f(z)dz$ e $\omega_2 = g(w)dw$, con f, g olomorfe rispettivamente su $V_1, V_2 \subset \mathbb{C}$, diremo che ω_1 trasforma in ω_2 sotto una mappa olomorfa $z = T(w)$ se $g(w) = f(T(w))T'(w)$.

Una 1-forma olomorfa su una superficie di Riemann è una collezione di 1-forme olomorfe $\{\omega_\phi\}_\phi$ che ricoprono X tali che, se due carte ϕ_1, ϕ_2 hanno intersezione non vuota di domini, allora la forma associata ω_{ϕ_1} trasforma in ω_{ϕ_2} sotto $T = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$.

Una volta che abbiamo definito una *1-forma olomorfa* per una superficie di Riemann X (quindi per un ricoprimento della superficie), esiste una forma sostanzialmente unica per estenderla a tutte le altre carte, ed è il modo più intuitivo possibile: data una carta ψ non considerata, prendo una carta compatibile ϕ di 1-forma locale $\omega_\phi = f(z)dz$ e definisco la 1-forma di ψ come $\omega_\psi = f(T(w))T'(w)dw$ dove $z = T(w) = \phi \circ \psi^{-1}(w)$.

Definizione 5.3. L'ordine di ω in p , denotato $\text{ord}_p(\omega)$, è l'ordine della funzione f in 0.

Allo stesso modo posso definire 1-forme meromorfe, partendo dalla costruzione in \mathbb{C} , e introducendo la nozione di compatibilità analoga.

Definizione 5.4 (Pullback). Sia $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ noncostante, e ω una 1-forma meromorfa. Consideriamo le carte (U, ϕ) e (V, ψ) risp. su X, Y tali che l'espressione locale di F è h s.t. $w = h(z)$. Assumiamo che in V $\omega = f(w)dw$, allora

$$F^*\omega = f(h(z))h'(z)dz$$

è detto *pullback* di F rispetto a ω .

Tale definizione è locale, ma poiché le carte sono compatibili la mappa si comporta bene sull'intero spazio.

Lemma 5.5. Sia $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ e ω una 1-forma meromorfa su Y . Allora, $\forall p \in X$:

$$\text{ord}_p(F^*\omega) = (1 + \text{ord}_{F(p)}(\omega))\text{mult}_p(F) - 1.$$

Dimostrazione. Consideriamo z coordinata locale presso p e w coordinata locale presso $F(p)$. Allora possiamo esprimere F come $w = h(z) = z^m$ per il Local Normal Form, dove $m = \text{mult}_p(F)$. Sia $\omega = f(w)dw$ e f esprimibile in serie come $f(w) = cw^k + \dots$, dove $k = \text{ord}_{F(p)}(\omega)$. Allora

$$F^*\omega = \text{ord}_p f(h(z)) + \text{ord}_p h' = \text{ord}_p (cz^{mk} + \dots) + m - 1 = mk + m - 1$$

che è la tesi cercata. □

Osservazione 5.6. Notiamo che $\text{ord}_p(f\omega_2) = \text{ord}_p(f) + \text{ord}_p(\omega_2) \implies \sum_p \text{ord}_p(f\omega_2) = \sum_p \text{ord}_p(f) + \sum_p \text{ord}_p(\omega_2)$. Inoltre, se la funzione f è definita su una superficie di Riemann compatta $\sum_p \text{ord}_p(f) = 0$ quindi si ha $\sum_p \text{ord}_p(f\omega_2) = \sum_p \text{ord}_p(\omega_2)$.

Lemma 5.7. *Siano ω_1, ω_2 1-forme meromorfe su X . Allora $\exists f \in \mathcal{M}(X)$ s.t. $\omega_1 = f\omega_2$.*

Dimostrazione. Pongo

$$\begin{aligned} \omega_1 &= g_1(z)dz = g_1(T(w))T'(w)dw \\ \omega_2 &= g_2(z)dz = g_2(T(w))T'(w)dw \end{aligned} \quad \text{dove } T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : w \mapsto z \text{ è la funzione di transizione}$$

Allora

$$\frac{g_1(T(w))}{g_2(T(w))} \circ \phi_1 = \frac{g_1}{g_2} \circ T \circ \phi_1 = \frac{g_1}{g_2} \circ \phi_2 = f.$$

Segue infatti che $f = g_1/g_2 \circ \phi$ è meromorfa in quanto rapporto di funzioni meromorfe.

□

Capitolo 6

Divisori

Definiamo con \mathbf{Z}^X lo spazio delle funzioni da X agli interi, gruppo rispetto all'addizione pointwise.

Definizione 6.1 (Divisore). Un *divisore* $D = \sum_{p \in X} n_p \cdot p$ su X è una funzione $D : X \rightarrow \mathbf{Z} : p \mapsto n_p$ che è nulla al di fuori da un insieme discreto di X .

L'insieme dei punti in cui D è non nullo è detto *supporto* di D . Lo spazio dei divisori forma un sottogruppo di \mathbf{Z}^X , ed è comunemente denotato $\text{Div}(X)$.

Definizione 6.2 (Grado del Divisore). Il *grado del divisore* D su una superficie di Riemann *compatta* è la somma dei suoi valori:

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p),$$

somma finita per la Proposizione 1.28.

Osservazione 6.3. La funzione $\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbf{Z}$ è un morfismo di gruppi, il cui kernel $\ker(\deg) = \text{Div}_0(X)$ consiste di tutti i divisori aventi grado zero. La dimostrazione di questo fatto è banale - basta applicare la definizione.

Definizione 6.4 (Divisore Principale). Sia f una funzione meromorfa non identicamente nulla, il *divisore di f* , denotato $\text{div}(f)$ è definito come:

$$\text{div}(f) = \sum_p \text{ord}_p(f) \cdot p$$

e tutti i divisori in questa forma sono detti *divisori principali*. L'insieme dei divisori principali è denotato come $\text{PDiv}(X)$.

Da questo segue banalmente che se f, g sono funzioni meromorfe, allora $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$, $\text{div}(f/g) = \text{div}(f) - \text{div}(g)$, e $\text{div}(1/f) = -\text{div}(f)$; inoltre, poiché tutte la somma degli ordini in una funzione meromorfa definita su una superficie di Riemann compatta è nulla, $f : X$ compatto $\implies \deg(\text{div}(f)) = 0$.

Definizione 6.5. Data una funzione meromorfa f su X , mediante la notazione $\text{div}_0(f)$ e $\text{div}_\infty(f)$ denoteremo rispettivamente i divisori dello zero e dei poli:

$$\begin{aligned} \text{div}_0(f) &= \sum_{\substack{p \in X \\ \text{ord}_p(f) > 0}} \text{ord}_p(f) \cdot p, \\ \text{div}_\infty(f) &= \sum_{\substack{p \in X \\ \text{ord}_p(f) < 0}} (-\text{ord}_p(f)) \cdot p. \end{aligned}$$

Questo tra l'altro implica che $\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f)$.

Definizione 6.6 (Divisori Canonici). Il divisore di ω 1-forma meromorfa su X non identicamente nulla è definito come:

$$\text{div}(\omega) = \sum_p \text{ord}_p(\omega) \cdot p$$

ed è detto *divisore canonico* su X . L'insieme dei divisori canonici su X è denotato con $\text{KDiv}(X)$.

Nel Lemma 5.7 abbiamo già visto che due 1-forme differiscono per una funzione meromorfa; un risultato immediato di questo è che il grado dei divisori di una 1-forma non dipende dalla forma scelta:

$$\deg(\operatorname{div}(\omega_1)) = \deg(\operatorname{div}(f\omega_2)) = \deg(\operatorname{div}(f)) + \deg(\operatorname{div}(\omega_2)) = \deg(\operatorname{div}(\omega_2)).$$

Corollario 6.7. *La differenza di due divisori canonici è principale, i.e.:*

$$\operatorname{KDiv}(X) = \operatorname{div}(\omega) + \operatorname{PDiv}(X) \quad \forall \omega \text{ 1-forma meromorfa.}$$

Dato che $\operatorname{PDiv}(X)$ è chiuso, è un *sottogruppo* di $\operatorname{Div}(X)$, e pertanto possiamo vedere $\operatorname{KDiv}(X)$ come una classe laterale di $\operatorname{PDiv}(X)$.

Si ha che per ogni X superficie di Riemann compatta, esiste una funzione meromorfa f su X . La dimostrazione di questo fatto non è per nulla banale, ma noi la diamo per scontata per dimostrare:

Proposizione 6.8. *Sia X una superficie di Riemann compatta, allora esiste un divisore canonico di grado $2g - 2$.*

Dimostrazione. X superficie di Riemann $\implies \exists f \in \mathcal{M}(X) \implies \exists F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ mappa associata. Sia $\omega = dz$ 1-forma su \mathbb{C}_∞ . Tale 1-forma non è olomorfa in quanto $z = 1/w$ espressione locale $\implies \omega = -dw/w^2$; è inoltre di grado -2 . Fisso $\eta = F^*\omega$ pullback di ω , allora:

$$\begin{aligned} \deg(\operatorname{div}(\eta)) &= \sum_p \operatorname{ord}_p(\eta) \\ &= \sum_p \operatorname{ord}_p(F^*\omega) \\ &= \sum_p [(1 + \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega)) \operatorname{mult}_p(F) - 1] && \text{[Lemma 5.5]} \\ &= \sum_{\substack{q \neq \infty \\ p \in F^{-1}(q)}} [\operatorname{mult}_p(F) - 1] + \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} [-\operatorname{mult}_p(F) - 1] && [\omega \text{ non ha zeri; ha polo di ordine } -2] \\ &= \sum_{p \in X} [\operatorname{mult}_p(F) - 1] - \sum_{p \in F^{-1}(\infty)} 2\operatorname{mult}_p(F) && [F \text{ surgettiva, conto due volte } \operatorname{mult}_{F^{-1}(\infty)}(F)] \\ &= 2g - 2 + 2\deg(F) - 2\deg(F) && \text{[Riemann-Hurwitz, definizione deg]} \\ &= 2g - 2. && \square \end{aligned}$$

6.1 Immagine Inversa del Divisore

Definizione 6.9 (Inverse Image Divisor). Sia $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ noncostante, e $q \in Y$. L'*immagine inversa del divisore* di q è definita come:

$$F^*(q) = \sum_{p \in F^{-1}(q)} \operatorname{mult}_p(F) \cdot p.$$

Definizione 6.10 (Pullback del Divisore). Sia $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q$ un divisore su Y , il *pullback del divisore* è definito come:

$$F^*(D) = \sum_{q \in Y} n_q \cdot F^*(q) \implies F^*(D)(p) = \operatorname{mult}_p(F) D(F(p))$$

Lemma 6.11 (Proprietà dei Divisori). *Sia $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ una mappa noncostante tra superfici di Riemann. Allora:*

- (i) *il pullback è un morfismo di gruppi;*
- (ii) *il pullback di un divisore principale è un divisore principale, infatti $F^*(\operatorname{div}(f)) = \operatorname{div}(F^*(f)) = \operatorname{div}(f \circ F^*)$;*
- (iii) *se X, Y sono compatti, allora il grado dei divisori*

$$\deg(F^*(D)) = \deg(F) \deg(D).$$

Dimostrazione.

(i) immediato poiché il divisore è costruito per linearità. Fissato un p :

$$\begin{aligned} F^*(D_1 + D_2)(p) &= [D_1(F(p)) + D_2(F(p))] \text{mult}_p(F) \\ &= D_1(F(p)) \cdot \text{mult}_p F + D_2(F(p)) \cdot \text{mult}_p F \\ &= F^*(D_1)(p) + F^*(D_2)(p); \end{aligned}$$

(ii) $f \in \mathcal{M}(Y)$, $p \in X \implies F^*(\text{div}(f))(p) = \text{mult}_p(F) \text{ord}_{F(p)}(f) = \text{ord}_p(f \circ F)$;

(iii) segue immediatamente dai precedenti. □

Il fatto che il pullback di un divisore principale è ancora un divisore principale implica anche che è ben definita la funzione $F^* : \text{Div}(Y)/\text{PDiv}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)/\text{PDiv}(X)$.

Definizione 6.12 (Branch e Ramification Divisors). Su $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$ definisco due nuovi divisori:

- $R_F = \sum_{p \in X} [\text{mult}_p(F) - 1] \cdot p$;
- $B_F = \sum_{y \in Y} \left[\sum_{p \in F^{-1}(y)} (\text{mult}_p(F) - 1) \right] \cdot y$

Si può così aggiustare la formula di Hurwitz - Teorema 3.51

$$2g(X) - 2 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_p \text{mult}_p(F) - 1 = \deg(F)(2g(Y) - 2) + R_F.$$

Definizione 6.13 (Intersection Divisor). Sia X una curva liscia proiettiva su \mathbb{P}^n , e sia $G(x_0 : \dots : x_n)$ un polinomio omogeneo non identicamente nullo su X . Definiamo il divisore di G in p $\text{div}(G)(p)$ come il divisore $\text{div}(G/H)(p)$ dove H è un polinomio omogeneo dello stesso grado non nullo in p (ad esempio $H = x_i^d$ dove $d = \deg G$ e x_i è una coordinata di p non nulla) e quindi il rapporto G/H è una funzione meromorfa.

Nel caso particolare in cui G ha grado uno si parla di *hyperplane divisor*.

Il divisore dell'intersezione è ben definito, poiché preso un qualunque altro polinomio omogeneo non nullo in p $\text{ord}_p(G/H') = \text{ord}_p(G/H \cdot H/H') = \text{ord}_p(G/H)$ poiché H, H' hanno ordine 0 in p per costruzione.

Notiamo inoltre che $\text{div}(G_1 G_2) = \text{div}(G_1) + \text{div}(G_2)$. per quanto riguarda invece la relazione con i divisori precedentemente definiti si può dimostrare:

Lemma 6.14. *Siano G_1 e G_2 due polinomi omogenei su X dello stesso grado, e $f = G_1/G_2$. Allora $\text{div}(f) = \text{div}(G_1) - \text{div}(G_2)$.*

Dimostrazione. Fissato un qualunque $p \in X$, $f = G_1/G_2 \implies f = G_1/H \cdot H/G_2 \implies \text{div}(f)(p) = \text{ord}_p(f) = \text{ord}_p(G_1/H) + \text{ord}_p(H/G_2) = \text{div}(G_1) - \text{div}(G_2)$. □

Possiamo indurre un ordinamento parziale sui divisori ddicendo che D divisore su una superficie di Riemann è $D \geq 0$ sse $D(p) \geq 0 \quad \forall p \in X$ e conseguentemente $D_1 \geq D_2$ sse $D_1 - D_2 \geq 0$. Inoltre, se $f, g \in \mathcal{M}(X)$ allora $\text{div}(f + g) \geq \min\{\text{div}(f), \text{div}(g)\}$.

6.2 Equivalenza Lineare di Divisori

Definizione 6.15. Due divisori D_1 e D_2 sono detti linearmente equivalenti se differiscono per un divisore principale, i.e. $D_1 \sim D_2 \iff D_1 - D_2$ è un divisore principale.

Lemma 6.16. *Si può notare che (i) l'equivalenza lineare è una relazione di equivalenza e (ii) in un compatto due divisori linearmente equivalenti hanno stesso grado.*

Dimostrazione. Per (i) basta pensare che i divisori principali formano un sottogruppo dei divisori, le sue classi laterali formano una partizione, quindi esiste una relazione di equivalenza che è proprio data dall'appartenenza allo stesso coset.

Per (ii) si nota che in un compatto il grado del divisore è sempre 0 (perché la somma degli ordini è nulla). Quindi $D_1 \sim D_2 \implies D_1 = \text{div}(f) + D_2 \quad (\exists f \in \mathcal{M}(X) \implies \deg(D_1) = \deg(D_2))$. □

Nota che da (i) segue anche che $D_1 \sim 0$ se D_1 è un divisore principale.

Lemma 6.17. *Sia X una superficie di Riemann. Allora:*

- (a) $f \in \mathcal{M}(X), f \neq 0 \implies \text{div}_0(f) \sim \text{div}_\infty(f)$;
- (b) *comunque presi due divisori canonici su X , essi sono linearmente equivalenti*;
- (c) *se $X = \mathbb{C}_\infty$, due punti qualunque sono linearmente equivalenti*;
- (d) *se $F \in \mathcal{O}(X \rightarrow Y)$, il pullback di due divisori linearmente equivalenti rispetto a F preserva l'equivalenza*;
- (e) *se $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ è una mappa olomorfa, allora l'immagine inversa del divisore $F^*(\lambda)$ è equivalente su ogni coppia di punti*;
- (f) *Se X curva liscia proiettiva e G_1, G_2 sono polinomi omogenei del medesimo grado definiti sulla variabili d'ambiente di X , allora $\text{div}(G_1) \sim \text{div}(G_2)$*

Dimostrazione. La (a) è banale: $f \in \mathcal{M}(X) \implies \text{div}(f)$ ha ordini non nulli solo in 0 e $\infty \implies \text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f) \implies \text{div}_0(f) \sim \text{div}_\infty(f)$. La (b) è altrettanto banale, si hanno ω_1, ω_2 1-forme su X , allora $\omega_2 = f\omega_1$ per qualche funzione meromorfa f su $X \implies \text{div} \omega_1 - \text{div} \omega_2 = \text{div} f$. Per (c), consideriamo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}_\infty$. Se $\lambda_1, \lambda_2 \neq \infty$ definisco $f = (x - \lambda_1)/(x - \lambda_2) \implies \text{div}(f) = 1 \cdot \lambda_1 + (-1) \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \infty \implies \lambda_1 \sim \lambda_2$; altrimenti (assumiamo $\lambda_2 = \infty$) e considero la funzione $f = (x - \lambda_1)$. Per la (d), è sufficiente ricordarsi che il pullback di un divisore principale è principale, e che il pullback è lineare (un morfismo di gruppi). Il punto (e) segue immediatamente dai due punti precedenti. Per la (f) mi basta definire $f = G_1/G_2$; allora $\text{div}(f) = \text{div}(G_1) - \text{div}(G_2) \implies \text{div}(G_1) \sim \text{div}(G_2)$. \square

Corollario 6.18. *Nel caso particolare in cui X è compatto, dal punto (a) segue immediatamente che se X è compatto, allora $\forall f \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulla, $\text{deg}(\text{div}_0(f)) = \text{deg}(\text{div}_\infty(f))$.*

Dal punto (f), segue che se X è una curva liscia proiettiva, il grado di due intersection divisors, comunque presi, è sempre uguale.

Dal punto (b), segue che due divisori canonici su X hanno stesso grado, quindi per il teorema 6.8 hanno tutti grado $2g - 2$.

6.3 Divisori sulla Sfera di Riemann

Teorema 6.19. *Sia D un divisore su \mathbb{C}_∞ . D è principale $\iff \text{deg}(D) = 0$.*

Dimostrazione.

“ \implies ” Banale: D principale $\implies \exists f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}_\infty) . D = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f) \implies \text{deg}(f) = 0$.

“ \impliedby ” $\text{deg}(D) = 0 \implies D = \sum_i e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$ con $e_\infty = -\sum_i e_i \implies D = \text{div}(f)$ con $f = \prod_i (x - \lambda_i)^{e_i}$. \square

Da questo segue che sulla sfera di Riemann $D_1 \sim D_2 \iff D_1 - D_2 \sim 0 \iff \text{deg}(D_1 - D_2) = 0 \iff \text{deg}(D_1) = \text{deg}(D_2)$.

6.4 Divisori sul Toro Complesso

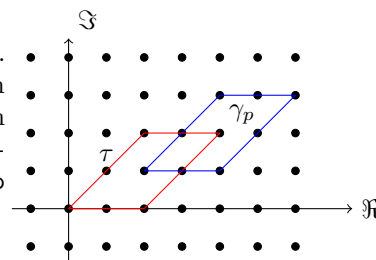
La cosa più interessante da dire a riguardo è che un divisore sul toro complesso X scritto come somma diretta dei legami proprio con l'attuale somma sulla curva.

Teorema 6.20 (Teorema di Abele). *Sia $A : \text{Div}(X) \rightarrow X : \sum_{p_i \in X} n_i \cdot p_i = \sum_{p_i \in X} n_i p_i$ somma attuale su X . Allora un divisore D è principale se e soltanto se $\text{deg}(D) = 0, A(D) = 0$.*

Dimostrazione. “ \impliedby ”. $A(D) = 0, \text{deg}(D) = 0 \implies D = \sum_i p_i - q_i$ per una collezione di zeri p_i e poli q_i (eventualmente ripetuti). Prendo le preimmagini z_i e w_i rispettivamente, e le scelgo tale che $\sum_i z_i - w_i = 0$ eventualmente traslando $z_i \mapsto z_i + \lambda$ (posso farlo perché la somma è $0 \in L$ e $[\lambda]_X = 0$). Allora $\exists f \in \mathcal{M}(X)$.

$$f = \frac{\prod_i \theta^{(z_i)}(x)}{\prod_i \theta^{(w_i)}(x)} \quad \text{e } D = \text{div}(f).$$

“ \implies ” $D = \text{div}(f)$, considero $h = f \circ \pi$ dove π è la proiezione naturale $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L$. h è meromorfa poiché f e π lo sono. Dato che gli zeri e i poli sono discreti su un compatto, posso quindi trovare un traslato γ_p della regione fondamentale che non abbia zeri o poli nei bordi (in questo modo ho le singolarità in corrispondenza 1-1 con X da \mathbb{C}). **TODO:** a questo punto si risolve un integrale, usando il teorema dei residui, che non ho ancora visto.



\square

Riassumendo quindi, due divisori D_1, D_2 sul toro complesso sono linearmente equivalenti sse hanno lo stesso grado e $A(D_1) = A(D_2)$.

6.5 Divisori su Curve Liscie Proiettive

Da qui in avanti, diremo che il *grado* di una curva liscia proiettiva X è il grado di una qualunque sua ipersuperficie. Tale definizione è ben posta poiché X è compatto, e due ipersuperfici su un compatto sono linearmente equivalenti.

Questa definizione cerca di generalizzare la definizione di grado per le smooth projective plane curves, e infatti i due valori coincidono:

Proposizione 6.21. *Sia X una curva liscia proiettiva piana luogo degli zeri di una funzione $F(x, y, z)$ di grado d . Allora il grado di X è d .*

Dimostrazione. Sia $G(x, y, z) = x$ una ipersuperficie su X e $(0 : 0 : 1)$ un punto non appartenente a X . Se questo non fosse il caso, posso fare un cambio di variabili e portarmi a questa situazione.

Posso notare che $(0 : 0 : 1) \notin X \implies x, y$ non sono mai simultaneamente nulli, pertanto posso considerare la funzione meromorfa $h = x/y$ per cercare il grado di G - quando y è non nulla. Allora

$$\deg X = \deg \operatorname{div} G = \deg \operatorname{div}_0 h = \deg \operatorname{div}_0(x/y).$$

considero la corrispondente mappa meromorfa $H : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ di h , e noto che

$$\operatorname{div}_0(x/y) = \sum_{\substack{p \in X \\ \operatorname{ord}_p > 0}} \operatorname{ord}_p(h) \cdot p = \sum_{p \in H^{-1}(0)} \operatorname{mult}_p(H) \cdot p = H^*(0)$$

il cui grado è $\deg H^*(0) = \deg H \deg 0 = \deg H$.

Ora, preso un punto $\lambda \in \mathbb{C}$, esiste un punto $p = (\lambda : 1 : z)$ tale che $H(p) = \lambda$. Infatti, $x = \lambda y$ e p inoltre sta nella curva $F(x, y, z)$. Ma allora tutti i punti di $H^{-1}(\lambda)$ possono esser scritti come $(\lambda : 1 : w)$ tali che $F(\lambda, 1, w) = 0$. Per un generico λ fissato, questo polinomio è di grado d e pertanto risulta avere d soluzioni. Segue che in un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ la cardinalità della preimmagine di H è d , quindi H ha grado d , quindi $\deg \operatorname{div} x = d$. \square

Teorema 6.22 (Teorema di Bezout). *Sia X una curva liscia proiettiva di grado d e sia G un polinomio omogeneo di grado e e non identicamente nullo su X . Allora*

$$\deg \operatorname{div} G = \deg X \deg G = de.$$

Dimostrazione. Sia H una ipersuperficie, allora $\deg \operatorname{div} H = \deg X = d$. D'altro canto $\operatorname{div} G \sim \operatorname{div} H^e$ poiché entrambi hanno lo stesso grado, quindi $\deg \operatorname{div} G = \deg \operatorname{div} H^e = \deg(e \operatorname{div} H) = ed$. \square

Il lemma che segue è fondamentalmente una premessa per la formula di Plücker.

Lemma 6.23. *Sia $X = \{F = 0\}$ una smooth projective plane curve. Sia $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1 : (x : y : z) \mapsto (x : z)$. Allora $\operatorname{div}(dF/dy) = R_\pi$.*

Dimostrazione. Considero $X \cap \{z \neq 0\}$ (per le altre intersezioni si ragiona similmente). Qui

$$X \simeq \{f(x : y) = F(x : y : 1) = 0\} \subset \mathbb{P}^1.$$

e fissato $p = (x_0, y_0)$ è un punto di ramificazione per π dev'esser $(df/dy)(p) = 0 \implies (df/dx) \neq 0$ poiché X liscia, quindi per il teorema della funzione implicita $\exists g$ funzione olomorfa definita su un intorno di y_0 in cui

$$f(x, y) = f(g(y), y) \implies 0 = \frac{\partial f(g(y), y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} g'(y) + \frac{\partial f}{\partial y} \implies \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x} g'(y)$$

in cui il primo fattore è non nullo per quanto detto sopra e il secondo ha ordine uno meno di g visto che $\pi_{|z \neq 0} : (x : y : z) \mapsto (x : 1) = x$ e $g(y) = x$ è una formula locale per tale mappa.

A questo punto abbiamo finito perché

$$\operatorname{ord}_p\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \operatorname{mult}_p(\pi) - 1 \implies \operatorname{div} \frac{\partial f}{\partial y} = R_\pi.$$

\square

Teorema 6.24 (Formula di Plücker). *Una smooth projective plane curve X di grado d ha genere*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Dimostrazione. $X = \{F = 0\}$ curva liscia piana proiettiva di grado d e $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1 : (x : y : z) \mapsto (x : z)$ ha grado d e $\deg R_\pi = \deg \operatorname{div}(dF/dy) = \deg(dF/dy) \cdot \deg X$ per Bezout quindi $\deg R_\pi = d(d-1)$. Per la formula di Hurwitz applicata a π allora

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= \deg \pi(2g(Y) - 2) - \deg R_\pi \\ &= d(-2) + d(d-1) && [g(\mathbb{P}^1) = 0] \\ \implies g &= \frac{d^2 - 3d + 2}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \end{aligned}$$

□

6.6 Spazi $L(D)$

Definizione 6.25 (Meromorphic functions with pole bounded by D).

$$L(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) : \operatorname{div}(f) \geq -D\}.$$

In pratica, se abbiamo $D(p) > 0 \implies \operatorname{ord}_p(f) > -D(p) \implies$ la funzione deve avere un polo di ordine minore di $D(p)$; e abbiamo $D(p) < 0 \implies \operatorname{ord}_p(f) > -D(p) \implies$ la funzione deve avere uno zero maggiore di $D(p)$. È abbastanza immediato che non possiamo aver poli peggiori di $D(p)$ per ogni punto p :

$$\begin{aligned} D(p) = n > 0 &\implies (f \in L(D) \iff \operatorname{div}(f)(p) = \operatorname{ord}_p(f) \geq -D(p) = -n) \\ &\implies \text{l'ordine di un polo in } f \text{ dev'esser pi\`u piccolo di } n. \end{aligned}$$

Osservazione 6.26. Si notano i seguenti fatti:

- (i) $D_1 \leq D_2 \implies L(D_1) \subset L(D_2)$ perché ogni funzione limitata sui poli da D_1 lo è certamente per D_2 ;
- (ii) $L(D)$ è uno spazio vettoriale in cui lo zero è $f = 0$ - si ridefinisce l'ordine essere $\operatorname{ord}_p(f) = \infty$ se f è indenticamente nulla per un intorno di p ;
- (iii) $L(0) = \mathcal{O}(X)$ che nel particolare caso di X compatto, implica che $L(0) = \{\text{funzioni costanti su } X\} \simeq \mathbb{C}$.

Teorema 6.27. X compatto, D divisore su X . $\deg(D) \leq 0 \implies L(D) = \{0\}$.

Dimostrazione. Per assurdo, $\exists f \in L(D) \cdot f \neq 0$, consideriamo il divisore $E = \operatorname{div}(f) + D \implies \deg(E) \geq 0 \implies \deg(\operatorname{div}(f)) + \deg(D) = \deg(D) \geq 0$ (poiché le funzioni meromorfe su un compatto hanno stesso numero di zeri e poli), ma questo è un assurdo. □

Definizione 6.28 (Complete Linear System). Sia D un divisore su una superficie di Riemann X . Il *sistema lineare completo di D* è l'insieme dei divisori positivi linearmente equivalenti a D .

$$|D| = \{E \in \operatorname{Div}(X) : E \sim D, E \geq 0\}$$

Nota che X compatto, $\deg(D) < 0 \implies |D| = \emptyset$.

Teorema 6.29. $S : \mathbb{P}(L(D)) \rightarrow |D| : \operatorname{Span}(f) \mapsto \operatorname{div}(f) + D$ è una corrispondenza 1-1 su una superficie compatta X .

Dimostrazione. Tale mappa è anzitutto ben definita poiché $S(f) = \operatorname{div}(f) + D = \operatorname{div}(\lambda f) + D = S(\lambda f)$.

È surgettiva perché $\forall E \in |D| \cdot E \sim D, E \geq 0 \implies \exists f \cdot E = \operatorname{div}(f) + D, E \geq 0 \implies f \in L(D)$.

È iniettiva perché $S(f) = S(g) \implies \operatorname{div}(f) + D = \operatorname{div}(g) + D \implies \operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(g)$, quindi f, g condividono stessi zeri e poli, quindi differiscono per una costante, quindi vivono nello stesso span. □

Definizione 6.30 (Sistema Lineare). Un *Sistema Lineare* è un sottospazio di $|D|$. La *dimensione* di un sistema lineare è la dimensione del corrispettivo $\mathbb{P}(L(D))$.

Un sistema di dimensione 1 è detto *pencil*; un sistema di dimensione 2 è detto *net*; uno di dimensione 3 è detto *web*.

Proposizione 6.31. $D_1 \sim D_2$ su $X \implies \exists h \in \mathcal{M}(X) . D_1 = D_2 + \text{div}(h)$. La mappa $\mu_h : L(D_1) \rightarrow L(D_2) : f \mapsto fh$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. Se $f \in L(D_1)$ allora $f \geq -D_1$ quindi $\text{div}(hf) = \text{div}(h) + \text{div}(f) \geq \text{div}(h) - D_1 = D_2$. Pertanto $\mu_h(f) = hf \in L(D_2)$. Si fa lo stesso ragionamento poi sulla mappa inversa $\mu_{1/h}$. \square

Si usa la stessa costruzione per definire lo spazio dei divisori lineari sulle 1-forme:

$$L^{(1)}(D) = \{ \omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \mid \text{div}(\omega) \geq -D \}.$$

Allo stesso modo dei divisori lineari possiamo affermare che $L^{(1)}(D)$ è uno spazio vettoriale e che $L^{(1)}(0) = \omega^{(1)}(X)$ spazio delle 1-forme olomorfe.

Possiamo specularmente applicare il teorema di sopra e affermare che la mappa $\mu_h : L^{(1)}(D_1) \rightarrow L^{(1)}(D_2) : \omega \rightarrow h\omega$ è un isomorfismo se $D_1 \sim D_2$ (dove $\text{div}(h) = D_1 - D_2$).

Considero ora un divisore canonico $K = \text{div}(\omega)$ con ω 1-forma, D divisore, ed $f \in L(K + D)$. Allora $\text{div}(f) + D + K \geq 0 \implies \text{div}(f\omega) + D \geq 0 \implies \mu_\omega(f) = f\omega \in L^{(1)}(D)$. Ma possiamo fare di meglio:

Lemma 6.32. $\mu_\omega : f \in L(D + K) \mapsto f\omega \in L^{(1)}(D)$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. La mappa è lineare, quindi possiamo dimostrare l'iniettività notando che $\ker \mu_\omega = \{0\}$. La mappa è inoltre surgettiva poiché $\forall \omega' \in L^{(1)}(D) \exists f \in L(D + K) . \omega' = \omega f = \mu_\omega(f)$. \square

6.7 Divisori Lineari sulla Sfera di Riemann

Il seguente teorema caratterizza i divisori lineari su uno spazio $X = \mathbb{C}P^1$.

Definiamo anzitutto, dato un divisore $D = \sum_i^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$ la mappa $f_D = \prod_i^n (z - \lambda_i)^{-e_i}$.

Teorema 6.33. D divisore sulla sfera di Riemann \mathbb{C}_∞ , allora

$$L(D) = \{ g(z)f_D(z) : g \in \mathbb{C}[z], \text{deg } g \leq \text{deg } D \}.$$

Dimostrazione. Poniamo $\text{deg } g = d$. Allora $\text{div } g \geq (-d) \cdot \infty$. Ricordiamo che dato un divisore $D = \sum_i^n e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$ la mappa f_D è definita essere $f_D = \prod_i^n (z - \lambda_i)^{-e_i}$ e i suoi divisori sono

$$\text{div } f_D = \sum_i^n (-e_i) \cdot \lambda_i + \left(\sum_i e_i \right) \cdot \infty.$$

Pertanto, per mostrare che è contenuto:

$$\begin{aligned} \text{div}(f_D g) + D &= \text{div } f_D + \text{div } g + D \\ &\geq \sum_i (-e_i) \cdot \lambda_i + \sum_i e_i \cdot \infty + (-d) \cdot \infty + \sum_i e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty && [d < \text{deg } D] \\ &= \left(\sum_i e_i + e_\infty - d \right) \cdot \infty = (\text{deg } D - d) \cdot \infty \geq 0. \end{aligned}$$

Per mostrare che contiene, seleziono $h \in L(D)$ e considero $g = h/f_D$. Allora $\text{div } g = \text{div } h - \text{div } f_D \geq -D - \text{div } f_D = \sum (-e_i - e_\infty) \cdot \infty = -\text{deg } D \cdot \infty$. Quindi g non può aver poli nella parte finita di \mathbb{C} e può aver un polo al massimo pari al grado di D su ∞ . \square

Segue da questo il corollario

Corollario 6.34.

$$\dim L(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } \text{deg } D < 0 \\ 1 + \text{deg}(D) & \text{se } \text{deg } D \geq 0 \end{cases}.$$

Dimostrazione. Assumiamo $D = \sum_i e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty$. Se $\text{deg}(D) \leq 0$ allora - e questo vale per tutti i compatti $L(D) = \{0\}$ poiché se per assurdo esistesse f meromorfa tale che $\text{div}(f) + D \geq 0$ si avrebbe che f ha zeri di ordine e_i per qualche i per compensare i termini negativi di D , quindi anche poli di ordine $-e_i$ quindi sarebbe comunque ≤ 0 .

Abbiamo già dimostrato che $L(D)$ è caratterizzato da $f_D g$ dove g è un polinomio di grado $\leq \text{deg } D$, quindi la dimensione dei divisori è $\text{deg } D + 1$, una per tutti i possibili gradi $0, \dots, \text{deg } D$. \square

6.8 Divisori Lineari sul Toro Complesso

Teorema 6.35. *In X toro complesso si ha che:*

- (a) $L(D) = \{0\}$ se $\deg D < 0$;
- (b) $\dim L(D) = 1$ se $\deg D = 0$ e $D \sim 0$;
- (c) $L(D) = \{0\}$ se $\deg D = 0$ e $D \not\sim 0$;
- (d) $\dim L(D) = \deg D$ se $\deg D > 0$.

Dimostrazione. Il punto (a) è stato già dimostrato nella precedente sezione. Per quanto riguarda (b) se $\deg(D) = 0$ e $D \sim 0$ allora D è principale e non identicamente nullo, quindi $\exists f \in \mathcal{M}(X) \cdot D = \text{div}(f)$ e

$$L(D) = \{g \in \mathcal{M}(X) \mid \text{div}(g) + \text{div}(f) \geq 0\} = \{g \in \mathcal{M}(X) \mid \text{div}(gf) \geq 0\} = \mathbb{C}$$

poiché non possono esserci né poli né zeri. In particolare, $\dim(L(D)) = 1$.

Per (c), dimostro invece che $|D| = \emptyset$. Da esso seguirà che non vi è alcuna funzione meromorfa non identicamente nulla che popola $L(D)$. Se per assurdo $E \in |D|$, allora sarebbe attuale e di grado uguale a D , i.e. $E \in |D| \implies E \geq 0 \wedge \deg E = \deg D = 0$. Ma allora $E \sim 0$ (poiché ha solo degli zeri, e il suo grado è zero), e $E \sim D$, che è un assurdo poiché per ipotesi $D \neq 0$.

Il punto (d) si mostra per induzione sul grado del divisore:

- se $\deg(D) = 1$ possiamo trovare un divisore equivalente della forma $1 \cdot p$, supponiamo quindi per semplicità D sia di questa forma. La prima cosa che possiamo notare è che $\mathbb{C} \subset L(D)$. D'altra parte, se esistesse una funzione meromorfa f noncostante in $L(D)$, dovrebbe avere un polo proprio in p di ordine 1, quindi la mappa meromorfa associata ad essa $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ sarebbe di grado 1 quindi un isomorfismo, ma questo è un assurdo. Segue quindi che $\dim L(D) = \deg D = 1$.
- se $\deg(D) = d > 1$, possiamo riscrivere il divisore come $D = D_1 + p$ dove $\deg D_1 = \deg D - 1$, quindi per ipotesi induttiva $\dim L(D_1) = d - 1$.

Per prima cosa mostro che $L(D_1) \neq L(D)$ (TODO: questa parte è veramente necessaria?). Trovo un $E \sim D$ divisore positivo non avente p nel proprio supporto, e definisco $f \in \mathcal{M}(X) \cdot \text{div}(f) = E - D \geq 0 \implies f \in L(D)$. Inoltre $\text{div} f + D_1 = E - D + D_1 = E - p \leq 0 \implies f \notin L(D_1)$. Pertanto $L(D_1) \neq L(D)$.

Per dimostrare che $\dim L(D) = d$, considero un'espressione locale centrata in p e suppongo $D(p) = n$ e chiamo a_{-n} il termine $-n$ -esimo della serie di Laurent, che alla peggio è il primo termine non nullo. La mappa $\tau : L(D) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto a_{-n}$ è lineare, e il suo nucleo ha dimensione $\dim \ker \tau = \dim L(D - p) = d - 1$. Segue che $\dim L(D) = \dim \ker \tau + \dim \text{Im} \tau = d$.

□

Lo spazio $L(D)$ è finito. Possiamo sfruttare la mappa lineare che abbiamo usato per dimostrare il teorema precedente per trovare un limite alla dimensione di $L(D)$.

Proposizione 6.36. *X superficie di Riemann; D un divisore su essa, $p \in X$. Allora*

$$L(D) = L(D - p) \quad \vee \quad L(D - p) \text{ ha codimensione } 1 \text{ su } L(D).$$

Dimostrazione. Considero un'espressione locale centrata in p , z , e per ogni funzione meromorfa f in $L(D)$, la sua serie di Laurent centrata in p sarà $c_n z^n +$ (termini di ordine più alto) con $n = -D(p)$. Considero l'applicazione lineare $\alpha : L(D) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto c_n$. Essa è una mappa lineare e

$$\ker(\alpha) = \{f \in L(D) \mid \text{ord}_p(f) \geq D - (p)\} = L(D - p)$$

poiché stiamo cercando tutte le funzioni con $z^n = 0$ quindi quelle con ordine più alto in p . Allora se α è identicamente nulla $L(D) = L(D - p)$, altrimenti $\dim L(D) = \dim \ker \alpha + \dim \text{Im} \alpha = \dim L(D - p) + 1$. □

Teorema 6.37. *Sia X una superficie di riemann compatta e D un divisore su di essa. Allora lo spazio delle funzioni $L(D)$ ha dimensione finita. Infatti $D = P - N \implies \dim L(D) \leq 1 + \deg(P)$ e se in particolare D è un divisore positivo $\dim L(D) \leq 1 + \deg(D)$.*

Dimostrazione. Per induzione sul grado del divisore positivo.

- $\deg P = 0 \implies P = 0 \implies \dim L(P) = 1$ (poiché sono tutte le funzioni olomorfe su un compatto, dunque le funzioni costanti) \implies dato che $L(D) \subset L(P)$ allora $\dim L(D) \leq \dim L(P) = 1 = \deg P + 1$;

► $\deg D = k \geq 1$. Scegliamo un punto p nel supporto di P , quindi $P(p) \geq 1$. Allora $D - p = P - p - N$ dove $(P - p)$ ha grado $k - 1$. Applichiamo quindi l'ipotesi induttiva ottenendo:

$$\dim L(D - p) \leq \deg(P - p) + 1 = k = \deg D.$$

Usando la proposizione precedente si ha che o $L(D) = L(D - p)$ (quindi la dimensione è proprio k), oppure $L(D - p)$ ha codimensione uno, quindi $L(D) = k + 1$. \square

Corollario 6.38. *Lo spazio $L^{(1)}(D)$ ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Immediato usando l'isomorfismo $L^{(1)}(D) \simeq L(D + K)$ col teorema precedente. \square

6.9 Proiettivizzazione

Definizione 6.39. Sia X una superficie di Riemann. Una mappa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ è detta *olomorfa* in un punto $p \in X$ se esistono funzioni olomorfe g_0, g_1, \dots, g_n definite su un intorno di p non tutte identicamente nulle, tali che

$$\phi(x) = (g_0(x) : g_1(x) : \dots : g_n(x)).$$

La mappa ϕ è detta *olomorfa* se è tale in ogni suo punto.

Abbiamo già visto che in una superficie di Riemann compatta tutte le mappe olomorfe sono costanti, per cui se usassimo per ogni coordinata la stessa funzione, otterremmo una funzione mappata costantemente a un punto, che non riserva granché di interessante.

Lemma 6.40. *Data una collezione di funzioni meromorfe f_0, f_1, \dots, f_n non tutte identicamente nulle, la mappa*

$$\phi_f(p) : X \rightarrow \mathbb{P}^n : x \mapsto (f_0(x) : f_1(x) : \dots : f_n(x))$$

può esser estesa ad una mappa olomorfa su tutto X .

Dimostrazione. Fisso $p \in X$, pongo $n = \min_i \text{ord}_p(f_i)$. Nella mappa ϕ_f possiamo aver problemi quando $n \neq 0$, ossia quando p è uno zero per tutte le funzioni, oppure un polo per alcune di esse.

Per la discretezza di zeri e poli, possiamo già affermare che in un intorno sufficientemente piccolo di p non vi sono ancora problemi con la mappa. Scegliamo allora una coordinata locale z centrata in p . È sufficiente considerare per un tale intorno la mappa

$$z \mapsto (z^{-n} f_0(z) : z^{-n} f_1(z) : \dots : z^{-n} f_n(z)).$$

Si verifica facilmente che tale funzione (proprio per come è stata costruita) è olomorfa su un intorno di p , e inoltre, se $z \neq 0$,

$$\phi_f(z) = (f_0(z) : f_1(z) : \dots : f_n(z)) = (z^n f_0(z) : z^n f_1(z) : \dots : z^n f_n(z))$$

\square

Teorema 6.41. *Sia $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ una proiettivizzazione olomorfa. Allora esiste una tupla $f = (f_0, f_1, \dots, f_n)$ di funzioni meromorfe tale che $\phi = \phi_f$. Inoltre, se $\exists f, g$ tuple come sopra tali che $\phi = \phi_g = \phi_f$, allora $\exists \lambda \in \mathcal{M}(X)$. $f_i = \lambda g_i \forall i$.*

Dimostrazione. A meno di riordinare le variabili, posso supporre che x_0 non sia identicamente nullo nell'immagine $\phi(X)$. Definiamo $f_i = x_i/x_0$. Possiamo notare che f_0 risulterà costantemente 1. Mostrare che le f_i sono meromorfe è facile: si considera, fissato un punto $p \in X$, un'espressione locale per $\phi(z) = (g_0(z) : g_1(z) : \dots : g_n(z))$. Allora f_i risulta essere meromorfa in quanto rapporto di funzioni olomorfe. Per il teorema precedente poi è evidente che $\phi = \phi_f$.

Per mostrare l'unicità, supponiamo che tutti gli f_i e g_i non siano identicamente nulli, altrimenti possiamo facilmente escluderli dalla discussione. Abbiamo insomma che, fissato un punto p e un'espressione locale z per un intorno di p , $\phi = \phi_g = \phi_f \implies z \mapsto (g_0(z) : g_1(z) : \dots : g_n(z)) = (f_0(z) : f_1(z) : \dots : f_n(z))$ e nessuno di questi è zero. Allora esiste un $\lambda(p) \in \mathbb{C}$ tale che $f_i(z) = \lambda(p)g_i(z)$ che implica $\lambda(p) = f_i/g_i$ che è una funzione meromorfa in quanto rapporto di funzioni globalmente meromorfe (questo sempre per il teorema precedente). \square

Il teorema di sopra in particolare sancisce una 1-1 corrispondenza tra le mappe $X \rightarrow \mathbb{P}^n$ olomorfe e $\mathcal{P}\mathcal{M}(X)^{n+1}$, i sottospazi 1-dimensionali delle $(n + 1)$ -uple di funzioni meromorfe su X .

Definizione 6.42 (Sistema lineare di mappe olomorfe). Data una mappa $\phi = (f_0 : f_1 : \dots : f_n)$ dove le f_i sono meromorfe, pongo $D = -\min_i \{ \text{div}(f_i) \}_i$, tale che $-D(p) \leq \text{div}(f_i)(p)$ e quindi $-D \leq \text{div}(f_i) \forall i \implies f_i \in L(D) \forall i$.

Definisco $V_f = \{ \sum_i a_i f_i : a_i \in \mathbb{C} \} \subset L(D)$, lo span \mathbb{C} -lieneare delle f_i . Esso è banalmente uno spazio vettoriale. Il sistema lineare per $|\phi|$ è definito come:

$$|\phi| = \{ \text{div}(g) + D \mid g \in V_f \} \subset |D|.$$

Un sistema lineare di dimensione n in cui tutti i divisori hanno grado d è spesso detto un “ g_d^n ”.

Lemma 6.43. *Il sistema lineare $|\phi|$ definito sopra è ben definito e non dipende dalla scelta degli $\{ f_i \}_i$ usati per costruire ϕ .*

Dimostrazione. Supponiamo $\phi = (g_0 : g_1 : \dots : g_n)$ con $g_i \in \mathcal{M}(X)$. Allora $g_i = \lambda f_i \forall i$ per il teorema precedente $\implies \text{div } g_i = \text{div } \lambda + \text{div } f_i$, e il minimo dei divisori di g_i differirà dal minimo dei divisori di f_i per l'ordine in λ : ossia, posto $D = -\min_i \{ \text{div } f_i \}_i$ e $D' = -\min_i \{ \text{div } g_i \}_i$ abbiamo che $D' = D - \text{div } \lambda \implies D' \sim D \implies |D'| = |D|$ per transitività.

Ora, per dimostrare che $|\phi_f| = |\phi_g|$ noto che un elemento di $|\phi_g|$ è della forma $\text{div}(\sum_i a_i g_i) + D'$, pertanto:

$$\begin{aligned} \text{div}\left(\sum_i a_i g_i\right) + D' &= \text{div}(a_i \lambda f_i) + D' \\ &= \text{div}\left(\sum_i a_i f_i\right) + \text{div } \lambda + D' \\ &= \text{div}\left(\sum_i a_i f_i\right) + D \in |\phi_f|. \end{aligned}$$

Faccio lo stesso ragionamento per gli f_i e per assioma di estensione segue la tesi. □

Lemma 6.44. *Data una mappa olomorfa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$, per ogni punto $x \in X$ esiste un divisore $E \in |\phi|$ che non ha p nel proprio supporto. In altre parole, non esistono punti che stanno nel supporto di tutti i divisori.*

Dimostrazione. Supponiamo che $p \in X$ sia tale che il minimo ordine è ottenuto in f_j .

Allora $D(p) = -\min_i \{ \text{ord}_p(f_i) \}_i = -\text{ord}_p f_j$. Pongo $E = \text{div } f_j + D \in |\phi|$. Segue che $E(p) = \text{ord}_p(f_j) - \text{ord}_p(f_j) = 0$. □

Definizione 6.45 (Base Point). Sia Q un g_d^r , ossia un sistema lineare di grado d e dimensione r , sulla superficie di Riemann X . Un punto $p \in X$ è detto *base point* del sistema lineare Q se ogni divisore $E \in Q$ contiene p nel suo supporto, i.e. $E \geq p \forall E \in Q$.

Un sistema lineare è detto *base-point free* se non ha base-point.

Esempio 6.46. $|0| = \mathcal{O}(X)$ è base-point free. In particolare, se X è compatto, allora $|0| = \{0\}$.

Abbiamo inoltre già visto che il sistema lineare $|\phi|$ di una mappa olomorfa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ è sempre base-point free.

Proposizione 6.47. *Sia $Q \subset |D|$ un sistema lineare. Allora $p \in X$ è un base-point per Q se il suo corrispondente sottospazio $V \subset L(D)$ è tale che $V \subset L(D - p)$. In particolare, p è un base-point per $|D|$ sse $L(D - p) = L(D)$.*

Dimostrazione. È sufficiente notare che, fissato un punto $p \in X$, esso è un base-point per Q se, data $f \in L(D)$, $\text{div}(f) + D \geq 0$, poiché p deve esser nel supporto di f , ed esser positivo. Ma allora $\text{div } f \geq -(D - p) \implies f \in L(D - p)$. Pertanto $Q \subset L(D - p)$. □

Corollario 6.48. *Sia D un divisore sulla superficie di Riemann compatta X . Allora $p \in X$ è un base-point per $|D|$ sse $L(D) = L(D - p)$; $|D|$ è base-point free sse, comunque preso $p \in X$, $\dim L(D - p) = \dim L(D) - 1$.*

Esempio 6.49. Ogni divisore di grado non-negativo sulla sfera di Riemann ha un sistema lineare completo base-point free (segue immediatamente dal fatto che due punti sulla sfera di Riemann sono linearmente equivalenti).

Esempio 6.50. Sul toro complesso, ogni divisore di grado almeno due ha un sistema lineare completo base-point free. TODO: perché?

Vi è un altro modo per ottenere un sistema lineare da una mappa ologomorfa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$. Sia quindi X una superficie di Riemann $H \subset \mathbb{P}^n$ il luogo degli zeri di un polinomio lineare omogeneo non nullo su tutto X . Definiamo ora il divisore $\phi^*(H)$, detto divisore dell'iperpiano H .

Per ipotesi, il polinomio L il cui luogo degli zeri descrive H non è identicamente nullo. Fissato un punto $p \in X$, scegliamo il polinomio M che sia non-nullo in $\phi(p)$. Allora la funzione $h = L/M \circ \phi$ è ologomorfa in un intorno di p . Definiamo:

$$\phi^*(H)(p) = \text{ord}_p h.$$

Si nota che h è ologomorfa, quindi tale quantità è sempre non-negativa, ed in particolare è positiva quando $\phi(p) \in H$.

Tale definizione, si può dimostrare, è ben posta: la scelta di M non influenza l'ordine in p di h - l'argomento procede in modo analogo alla buona definizione degli intersection divisors-, e moltiplicare L per una costante con cambia allo stesso modo tale valore. Vogliamo ora mostrare che $\{\phi^*(H)\} = |\phi|$. Per fare questo è sufficiente fare la seguente osservazione.

Lemma 6.51. *Sia \mathbb{P}^n ambiente in coordinate $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Sia H un iperpiano definito dall'equazione lineare omogenea $L = \sum_i a_i x_i = 0$. Sia $\phi = (f_0 : f_1 : \dots : f_n)$ e $D = -\min \text{div } f_i$. Se $\phi(X) \not\subset H$, allora*

$$\phi^*(H) = \text{div}(L) + D.$$

Dimostrazione. Fissato $p \in X$, esiste un j tale che $D(p) = -\text{ord}_p(f_j)$. Questo vuol dire che x_j non svanisce in p , quindi possiamo fissare $M = x_j$. Allora

$$\phi^*(H)(p) = \text{ord}_p h = \text{ord}_p L - \text{ord}_p x_j = \text{ord}_p L + D(p).$$

□

Corollario 6.52. *Sia $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ una mappa ologomorfa. Allora il sistema dei divisori dell'iperpiano $\{\phi^*(H)\}$ forma il sistema lineare completo $|\phi|$.*

Proposizione 6.53. *Sia $Q \subset |D|$ un sistema lineare base-point free. Allora esiste una mappa ologomorfa $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$. $Q = |\phi|$. Inoltre ϕ è unica a meno di cambi di variabili su \mathbb{P}^n .*

Dimostrazione. Sia $V < L(D)$ il sottospazio corrispondente al sistema lineare Q . I divisori di Q sono della forma $\text{div } f + Q$ con $f \in V$. Sia f_0, f_1, \dots, f_n una base per V , allora la mappa $\phi = (f_0 : f_1 : \dots : f_n)$ è tale che $Q = |\phi|$.

Per mostrarne l'unicità, si supponga $\exists \phi' = (g_0 : g_1 : \dots : g_n)$ e $Q = |\phi| = |\phi'|$. Allora, facendo eventualmente un cambio di variabili, posso supporre che $\text{div } f_i + D = \text{div } g_i + D'$, con $D = -\min_i \text{div } f_i$ e $D' = -\min_i \text{div } g_i$. Definisco $h = f_i/g_i$, allora $\text{div } h = \text{div } f - \text{div } g_i = D' - D$, che è indipendente da i , quindi f_i e g_i sono uguali a meno di un fattore costante. Pertanto $|\phi| = |\phi'|$, quindi ϕ risulta esser unica a meno di un cambio di coordinate. □

Segue da questo che vi è una 1-1 corrispondenza tra i sistemi lineari di dimensione n su X e le mappe ologomorfe $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ la cui immagine è nondegenere, a meno di un cambio di variabili.

Definizione 6.54 (Fixed Divisor). Supponiamo che $|D|$ abbia base point. Considero il più piccolo divisore di $|D|$, $F = \min |D|$. Esso è simultaneamente il più piccolo divisore di $|D|$ e il più grande divisore che compare su ogni elemento del sistema lineare. Segue insomma che $|D| = F + |D - F|$. Chiamo F *fixed part*, o *fixed divisor*, e chiamo $|D - F|$ *moving part* di $|D|$.

Lemma 6.55. *Sia D un divisore ed F la fixed part di D . Allora $L(D - F) = L(D)$.*

Dimostrazione. Si usa l'assioma di estensione:

- $L(D) \supset L(D - F)$. Questo perché $F \geq 0$ (giacché sta in $|D|$), quindi $D - F \leq D$, quindi il divisore di una funzione meromorfa in $L(D - F)$ sta anche in $L(D)$.
- comunque presa una funzione meromorfa $f \in L(D)$, si ha che:

$$\begin{aligned} \text{div } f + D &\geq 0 \\ \implies \text{div } f + D - F + F &\geq 0 && \text{[poiché } \text{div } f + D \in D] \\ \implies \text{div } f + (D - F) &= D' \geq 0 \\ \implies f &\in L(D - F). && \square \end{aligned}$$

Dato un divisore D su X , tale che $|D|$ sia base-point free, indicheremo con ϕ_D il sistema lineare ad esso associato.

Lemma 6.56. *Sia X una superficie di Riemann compatta, e D un divisore su di essa con $|D|$ base-point free. Fissato un $p \in X$ esiste una base f_0, f_1, \dots, f_n di $L(D)$ tale che $\text{ord}_p(f_0) = -D(p)$ e $\text{ord}_p(f_i) > -D(p)$ per ogni $i \geq 1$.*

Dimostrazione. Considero $L(D - p)$ sottospazio di $L(D)$ a codimensione 1 - ricordiamo che $|D|$ è base-point free, quindi non esistono punti per cui $L(D - p) = L(D)$, e siano f_1, f_2, \dots, f_n una base di $L(D - p)$.

Posso estendere lo spazio $L(D - p) = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ con f_0 per ottenere $L(D)$. Questo implica che $\text{ord}_p(f_i) \geq -D(p) + 1 > -D(p) \forall i \geq 1$, mentre $\text{ord}_p(f_0) = -D(p)$, infatti se per assurdo fosse $\text{ord}_p(f_0) > -D(p)$ si avrebbe che $f_0 \in L(D - p)$. \square

Lemma 6.57. *Sia X una superficie di Riemann compatta, e D un fivisore tale che $|D|$ è base-point free. Allora, presi due punti distinti $p, q \in X$ si ha $\phi_D(p) = \phi_D(q)$ se e soltanto se $L(D - p - q) = L(D - p) = L(D - q)$.*

In particolare, ϕ_D è bigettiva sse $\forall p, q \in X$ distinti $\dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 2$.

Dimostrazione. ϕ_D è uncamente dipendente da $L(D)$, e non dalli basi scelte per esso; quindi posso prendere le basi come nel teorema precedente, e con esse ho che $\phi_D(p) = \phi_D(q) \iff \phi_D(p) = \phi_D(q) = [1 : 0 : 0 : \dots : 0]$, che a sua volta si ha sse $\text{ord}_q f_0 < \text{ord}_q f_i \forall i \geq 1$ per costruzione della mappa $\phi_D = \phi_f$.

Inoltre, q non è un base point di $|D| \implies \text{ord}_q f_0 = -D(q) \wedge \text{ord}_q(f_i) > -D(q) \forall i \leq 1$, Questo è equivalente a dire che

$$L(D - p) = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle = L(D - q).$$

In particolare, $\forall f \in L(D) \cdot \text{ord}_p(f) > -D(p) \implies \text{ord}_q(f) > -D(q)$. Quindi $L(D - p) \subset L(D - p - q)$, e (poiché l'altro verso è banale) per assioma di estensione segue il primo pezzo della tesi iniziale.

Per la seconda proposizione sono necessari prima i seguenti accorgimenti: $|D|$ è base-point free implica che $\dim L(D - p) = \dim L(D - q) = \dim L(D) - 1 \forall p, q \in X$, e quindi $\dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 1$ oppure $\dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 2$.

Se ϕ_D è bigettiva, allora $L(D - p - q) \subsetneq L(D - p) \implies \dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 2$. D'altra parte, se $\dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 2 \implies L(D - p - q) \subsetneq L(D - p) \subsetneq L(D) \implies \phi_D$ è bigettiva. \square

Lemma 6.58. *Sia D un divisore su una superficie di Riemann compatta X , tale che $|D|$ sia base-point free. Allora ϕ_D è un embedding olomorfo (e $\phi_D(X)$ una superficie di Riemann) se e soltanto se $\forall p \in X$,*

$$\dim L(D - 2p) = \dim L(D) - 2$$

Dimostrazione. Poiché $|D|$ è base-point-free su un compatto, $L(D) \supsetneq L(D - p)$ - i due infatti non possono essere uguali in quanto hanno dimensioni diverse. Come ho fatto già precedentemente, posso scegliere dunque f_1, \dots, f_n base per $L(D - p)$ e completarla con $f_0 \in L(D) - L(D - p)$.

In un intorno di p , posso esprimere ϕ_D come nell'equazione seguente, usando un'espressione locale z :

$$\begin{aligned} \phi_D(z) &= (c_0 z^{-D(p)} + \dots + c_1 z^{-[D(p)-1]} + \dots + \dots + c_n z^{-[D(p)-1]} + \dots) \\ &= (c_0 + \dots + c_1 z + \dots + \dots + c_n z + \dots), \end{aligned}$$

e affinché questa sia una curva in \mathbb{P}^n è necessario che almeno una derivata del rapporto di coordinate sia non nulla in un intorno di $\phi(p)$, cosicché possa usare il teorema della funzione implicita. Il che vuol dire che ci deve essere uno tra c_1, \dots, c_n non nullo. Quindi, in un intorno di $\phi_D(p)$, X è una superficie di Riemann se e soltanto se esiste un i tra 1 ed n tale che $c_i \neq 0$, o equivalentemente tale che $\text{ord}_p f_i = -D(p) + 1 \implies f_i \notin L(D - 2p) \implies L(D - 2p) \subsetneq L(D - p) \subsetneq L(D)$. \square

Corollario 6.59. *Dato un divisore D su una superficie di Riemann compatta X , ϕ_D è un embedding sse $\forall p, q$ (anche uguali), si ha:*

$$\dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 2$$

Definizione 6.60 (Very Ample Divisor). *Se D è un divisore per cui ϕ_D risulta essere un embedding, allora è detto very ample divisor.*

Esempio 6.61. Ogni divisore di grado positivo sulla sfera di Riemann è molto ampio. **TODO: giustificare**

Esempio 6.62. Ogni divisore di grado almeno 3 sul toro complesso è very ample. **TODO: giustificare**

Definizione 6.63 (Grado di una mappa olomorfa). *Sia $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ una mappa olomorfa, e $Y = \phi(X)$ una curva liscia proiettiva. Allora la mappa ϕ ha grado il numero di preimmagini di un punto qualunque su Y .*

Il grado di una mappa olomorfa è legato a quello dei divisore di un iperpiano dalla proposizione seguente:

Proposizione 6.64. *Sia $\phi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ una mappa ologomorfa con $Y = \phi(X)$ curva liscia proiettiva. Sia H un iperpiano di Y , allora*

$$\deg \phi^*(H) = \deg \phi \cdot \deg Y.$$

In particolare, se D è very ample, allora ϕ è un embedding ologomorfo, quindi $\deg(\phi(X)) = \deg(D)$.

Dimostrazione. Sia $H = \{L = 0\}$ dove L è un polinomio lineare omogeneo. Fissato $p \in X$ abbiamo che

$$\phi^*(H)(p) = \text{mult}_p(\phi) \cdot \text{div}(L)(\phi(p)) = \text{mult}_p(\phi) \text{ord}_{\phi(p)}(h) \quad \text{dove } h = L/M$$

per definizione (nota: M è polinomio lineare omogeneo non nullo in p). Quindi

$$\begin{aligned} \deg \phi^*(H) &= \sum_{p \in X} \phi^*(p) \\ &= \sum_{p \in X} \text{mult}_p(\phi) \text{div}(L)(\phi(p)) \\ &= \sum_{q \in Y} \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} \text{mult}_p(\phi) \text{div}(L)(q) \\ &= \sum_{q \in Y} \text{div}(L)(q) \sum_{p \in \phi^{-1}(q)} \text{mult}_p(\phi) \\ &= \sum_{q \in Y} \text{div } L(q) \deg \phi \\ &= \deg \text{div } L \cdot \deg \phi. \end{aligned}$$

□

Capitolo 7

Riemann-Roch: teorema e applicazioni

Teorema 7.1 (Riemann-Roch). *Sia X una curva algebrica di genere g . Allora per ogni divisore D e ogni divisore canonico K ,*

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

Alternativamente, possiamo usare la dimensione del sistema lineare corrispondente:

$$\dim |D| - \dim |K - D| = \deg D + 1 - g.$$

È stato inizialmente Riemann a formulare il teorema come $\dim L(D) \geq \deg D + 1 - g$, e successivamente Roch a fornire il termine di correzione.

Osservazione 7.2. Sia D un divisore su una superficie di Riemann X di genere g , e K un divisore canonico sulla stessa. Allora $\deg D \geq 2g - 1 \implies \dim L(K - D) = 0$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.8, $\deg(K - D) = \deg K - \deg D = 2g - 2 - \deg D \leq 0$. Quindi $L(K - D) = \{0\}$. \square

Corollario 7.3. *Se $\deg D \geq 2g$, allora $|D|$ è base-point-free. Se $\deg D \geq 2g + 1$ allora D è very ample.*

Dimostrazione. Per il primo punto, si nota che $\deg(D - p) \geq 2g - 1$. Usando Riemann-Roch, $\dim L(D) = \deg D + 1 - g$ e $\deg L(D - p) = \deg D - g$, da cui $\dim L(D) = 1 + \dim L(D - p)$.

Per il secondo punto, si nota inoltre che $\dim L(D - p - q) = \deg D - 1 - g$, ottenendo $\dim L(D) = \dim L(D - p - q) + 2$. \square

Lemma 7.4. *Se esiste un punto in X tale che $\dim L(p) \geq 2 \implies X \simeq \mathbb{C}_\infty$.*

Dimostrazione. Poiché la dimensione dello spazio $L(D)$ è maggiore di 1, esiste una funzione $f \in L(p)$ noncostante tale che $\operatorname{div} f + p \geq 0$. Quindi f ha un polo semplice in p ed è olomorfa in tutti gli altri punti, e pertanto la mappa corrispondente $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ è un isomorfismo. \square

Vediamo che succede per le diverse superfici quando studiamo il genere:

Superfici di genere $g = 0$.

Proposizione 7.5. *Si ha che $X \simeq \mathbb{C}_\infty$.*

Dimostrazione.

$$\dim L(p) - \dim L(K - p) = 1 + \deg p - g = 2.$$

Ora, poiché $\deg(K - p) = \deg K - \deg p = -3 \leq 0 \implies \dim L(K - p) = 0$, la dimensione dello spazio $\dim L(D) = 2$ e dunque per il lemma precedente esiste un isomorfismo con \mathbb{C}_∞ . \square

Superfici di genere $g = 1$.

Qui c'è un teorema più generale, che viene dalla teoria dei ricoprimenti, per il quale ogni superficie risulta isomorfa ad un toro complesso.

Possiamo facilmente notare inoltre che $\deg K = 0 \implies K \simeq 0$, e che $\dim L(K) = 1$ (basta usare Riemann-Roch con $D = K$).

Superfici di genere $g = 2$.

Proposizione 7.6. *Tutti i divisori canonici sulla superficie di Riemann X di genere 2 generano un sistema lineare completo base-point-free.*

Dimostrazione. Preso un divisore canonico K , $\deg K = 2g - 2 = 2$. Usando Riemann-Roch, si nota che

$$\dim L(K) - \dim L(0) = \deg K + 1 - g = 1 \implies \dim L(K) = 2.$$

Possiamo studiare anche il divisore $K - p$ usando Riemann-Roch:

$$\dim L(K - p) - \dim L(p) = \deg(K - p) + 1 - g = 0 \implies \dim L(K - p) = \dim L(p).$$

Poiché la dimensione degli spazi $L(D)$ sui compatti è sempre superiormente limitata dal grado, $L(K - p) = L(D)$ è 0, o 1, ma il primo dei due è da escludersi poiché tutte le funzioni olomorfe stanno dentro $L(p)$.

Segue che la dimensione di $L(K)$ è uno più la dimensione di $L(K - p)$, quindi $|K|$ è base-point free. \square

Consideriamo ora la mappa $\phi_k : X \rightarrow \mathbb{P}^1 : p \mapsto (f_1(p) : f_2(p))$ con $f_1, f_2 \in L(D - p)$ **TODO: non sono sicuro questo appartiene sia corretto.** Tale mappa ha grado

$$\deg K = \deg \phi_K \deg \mathbb{P}^1$$

dove $\deg K = 2$ per quanto detto sopra, e $\deg \mathbb{P}^1 = 1$, quindi $\phi_K = 2$. Abbiamo così appena dimostrato che:

Proposizione 7.7. *Ogni superficie di Riemann di genere 2 è iperellittica.*

Definizione 7.8 (Curva Iperellittica). Una superficie di Riemann X è detta *iperellittica* se, equivalentemente:

- (i) $\exists \phi : X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$.
- (ii) $\exists D \in \text{Div}(X)$. $\deg D = 2$ e $\dim L(D) = 2$
- (iii) X ha un sistema lineare g_2^1 , i.e. di dimensione 1 e grado 2.

Osservazione 7.9. Sia X una superficie di Riemann di genere $g > 0$. Allora $|K|$ è base-point-free.

Dimostrazione. Come prima, si mostra che $\dim L(D) = 1 + \dim L(D - p)$:

$$\begin{aligned} \dim L(K) - \dim L(0) &= (2g - 2) + 1 - g \implies \dim L(K) = g \\ \dim L(K - p) - \dim L(p) &= (2g - 2 - 1) - g + 1 \implies \dim L(K - p) = g - 1. \end{aligned} \quad \square$$